Dr. Rainer Feldmann

Paderborn, 10.4.2006
Abgabe 8.5.2006, F2.401

Übung zu
Optimierung II
SS 2006
Blatt 1

Aufgabe 1: (Programmieraufgabe)
Es sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Das Shuffle-Exchange Netzerk $SX_n = (V_n, E_n)$ ist definiert durch
$$V_n = \{0,1\}^n, \quad E_n = \{(u, s(u)), (u, x(u)) \mid u \in V_n\}$$
mit $s(u_{n-1} \dots u_0) = u_{n-2} \dots u_0 u_{n-1}, \quad x(u_{n-1} \dots u_0) = u_{n-1} \dots u_1 \overline{u_0}$

a) Schreibe ein Generatorprogramm, das bei Eingabe von $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ eine Instanz $(SX_n, 0^n, 1^n, c)$ für das $MaxFlow$-Problem im .lp-Format von Cplex generiert. Dabei sei zunächst für $u = u_{n-1} \dots u_0$ und $v = v_{n-1} \dots v_0$ $c_{(u,v)} := v_0 u_{n-1} \dots u_0$, also insbesondere $c(0...0, 0...01) = 2^n$. Erweitere das Generatorprogramm dann so, daß es auf Wunsch zufällige Kantenkapazitäten erzeugt (Zufallszahlengenerator mit einer Zahl σ initialisieren, die Teil der Eingabe ist).

b) Schreibe ein Script, das zuerst das Generatorprogramm aufruft, dann Cplex auf dem generierten File startet, und nach der Optimierung die Lösung des Flussproblems in Tabellenform ausgibt.

c) Schreibe eine Eingaberoutine, die Files im .lp-Format einliest und das entsprechende Optimierungsproblem in einem Simplex-Tableau für Maximierungsprobleme darstellt.

   Aufgrund der Gleichheitsbedingungen für die Flusserhaltung ergeben sich hier Gleichungen im Tableau mit einer "Slackkonstanten" 0. Eliminiere diese zuerst durch geeignete Pivotschritte (vgl. das Beispiel auf der Rückseite dieses Übungszettels).

   Implementiere die Simplex-Algorithmen für primal bzw. dual zulässige MAX-Tableaus.

   Optimiere dann und gebe die Lösung in Tabellenform wie in a) aus. Vergleiche die Ergebnisse von Cplex und Deinem eigenen Simplexalgorithmus.

Betrachte das einfache Netzwerk
$G = (V, E)$ mit $V = \{s, u, t\}$, $E = \{(s, u), (u, t)\}$, $c_1 := c(s, u)$, $c_2 := c(u, t)$.
Wir benutzen Variablen x_1, x_2 für den Fluss auf den Kanten (s, u) bzw. (u, t).
Die Kapazitätsbedingungen sind dann $x_1 \leq c_1$ und $x_2 \leq c_2$. Die Flusserhaltungsbedingung ist $x_1 - x_2 = 0$, die Zielfunktion ist $x_2 \to \max$.
Damit kann folgendes Tableau aufgebaut werden:

	NBV			BV
MAX	x_1	x_2	-1	
	1	0	c_1	$= -t_1$
	0	1	c_2	$= -t_2$
	1	-1	0	$= -0$ /* ! */
	0	1	0	

Ein Pivotschritt mit der "1" in Zeile "0" und Spalte "x_1" bringt die "Slackkonstante" aus der Basis:

	NBV			BV
MAX	0	x_2	-1	
	-1	1	c_1	$= -t_1$
	0	1	c_2	$= -t_2$
	1	-1	0	$= -x_1$
	0	1	0	

Die Spalte, die mit 0 multipliziert wird, kann jetzt gestrichen werden.

	NBV		BV
MAX	x_2	-1	
	1	c_1	$= -t_1$
	1	c_2	$= -t_2$
	-1	0	$= -x_1$
	1	0	

Das resultierende Tableau ist primal zulässiges MAX-Tableau und kann mit dem primalen Algorithmus optimiert werden.