Nash Equilibrium als Fixpunkt einer Funktion:

Richard D. McKelvey, Andrew McLennan:
Computation of Equilibria in Finite Games

Yvonne Bleischwitz

Juli 2002

Notation

Wir betrachten ein endliches N-Personen Spiel in Normalform:

- $N = \{1, \ldots, n\}$: Menge der N Spieler
- $\forall i \in N$:
  $S_i = \{s_{i1}, \ldots, s_{im_i}\}$ sei die Strategiemenge für Spieler i (m_i pure Strategien)
- $\forall i \in N$ und $S = \prod_{i \in N} S_i$:
  $u_i : S \mapsto \mathbb{R}$ sei eine Nutzenfunktion
- $\Delta_i = \{p_i \in \mathbb{R}^{m_i} : \sum_j p_{ij} = 1, p_i \geq 0\}$ sei die Menge der Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf S_i.
- $\Delta = \prod_{i \in N} \Delta_i \subseteq \mathbb{R}^m$

Notation

- Punkte in $\Delta : p = (p_1, \ldots, p_n)$ mit $p_i = (p_{i1}, \ldots, p_{im_i}) \in \Delta_i$

- Erweiterung der Nutzenfunktion u auf $\mathbb{R}^m$ ($m = \sum_{i \in N} m_i$) durch:

$$u_i(p) = \sum_{s \in S} p(s) u_i(s), \quad \mathrm{mit\ \ p(s) = \prod_{j \in N} p_j(s_j)}$$

- s_{ij} bezeichne das Element $p_i \in \Delta_i$ mit $p_{ij} = 1$.

- Die Notation (s_{ij}, p_{-i}) bezeichnet die Strategie, in der Spieler i die pure Strategie s_{ij} spielt und alle anderen Spieler ihre Strategien (Komponenten aus p) beibehalten.

- Definition: $p^* \in \Delta$ ist ein Nash Equilibrium, wenn für alle $i \in N$ und alle $p_i \in \Delta_i$ gilt:

$$u_i(p_i, p^*_{-i}) \leq u_i(p^*).$$

Nash Equilibrium als Fixpunkt einer Funktion

Definition von drei Funktionen x, z und $g : \Delta \mapsto \mathbb{R}^m$, abgeleitet von Nutzenfunktion u:
Für alle $p \in \Delta, i \in N$ und $s_{ij} \in S_i$ definieren wir die ij-te Komponente wie folgt:

$$x_{ij}(p) = u_i(s_{ij}, p_{-i})$$

$$z_{ij}(p) = x_{ij}(p) - u_i(p)$$

$$g_{ij}(p) = \max\left[z_{ij}(p), 0\right]$$

Nash Equilibrium als Fixpunkt einer Funktion

Definiere $y : \Delta \mapsto \Delta$ mit ij-ter Komponente:

$$y_{ij}(p) = \frac{p_{ij} + g_{ij}(p)}{1 + \sum_j g_{ij}(p)}$$

Dann gilt:

$$p^* \text{ ist ein Nash Equilibrium} \Leftrightarrow p^* = y(p^*).$$

Da y eine stetige Funktion auf der kompakten Menge Δ ist, folgt aus dem Fixpunktsatz von Brouwer, dass y einen Fixpunkt hat.

Simpliziale Unterteilung

- Für n-Personen Spiele mit $n > 2$ ist das Problem, ein Nash Equilibrium zu finden, kein LCP (linear complementarity problem) mehr. Somit kann der Lemke-Howson Algorithmus nicht benutzt werden.

- Der Algorithmus, der hier vorgestellt wird, ist abgeleitet von Scarf's Algorithmus zur Approximation von Fixpunkten einer stetigen Funktion auf einer kompakten Menge:

  Scarf, H.: *The Approximation of Fixed Points of a Continuous Mapping*, SIAM Journal of Applied Mathematics, 15(1967): pp. 1328-1343

- Scarf's Algorithmus findet Fixpunkte einer Funktion $f : \Delta^n \mapsto \Delta^n$, die auf dem $(n-1)$-dimensionalen Simplex $\Delta^n = \{p = (p_1, \ldots, p_n) : \sum_{i=1}^n p_i = 1, p_i \geq 0\}$ definiert ist. Im Bereich der Spieltheorie wird eine Version benötigt, die auf dem Produkt der Einheitssimplizes $\Delta = \prod_i \Delta_i$ operiert.

Simpliziale Unterteilung

- $s_{ij} = e_{ij}$, mit e_{ij} ist der (ij)-te Basisvektor in $\mathbb{R}^m$,
  d.h.: e_{ij} ist ein Vektor mit einer 1 an Stelle $\sum_{l=1}^{i-1} m_l + j$, und 0 sonst.

- $S_i = \{e_{i1}, \ldots, e_{im_i}\}$, $\Delta_i = \sigma(S_i) = \sigma(e_{i1}, \ldots, e_{im_i})$, $\Delta = \prod_i \sigma(S_i)$

- Für eine Teilmenge $T \subseteq \cup_i S_i$ sei T_i definiert durch: $T_i = T \cap S_i$.

- Algorithmus behandelt jede Strategiemenge der puren Strategien eines Agenten als eine geordnete Menge. Diese Ordnung kann beliebig definiert werden, in diesem Algorithmus wird sie durch die Indizierung beschrieben:
  Eine Teilmenge $T \subseteq \cup_i S_i$ ist geordnet, falls für alle i ein $k_i > 0$ existiert, so dass $T_i = \{s_{ij} : j \leq k\}$. Für eine geordnete Menge T sei $\bar{T}_i$ definiert durch: $\bar{T}_i = T_i \cup \{s_{i,k_i+1}\}$.

Simpliziale Unterteilung (Beispiel)

$$S_1 = \{1,2,3\},\ S_2 = \{4,5\}, m_1 = 3,\ m_2 = 2,\ m = 5, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$p = ((\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}))^T$ und $p_1^{'} = s_{12} = (0,1,0)^T \Rightarrow (p1^{'}, p_{-1}) = ((0,1,0), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}))^T$

$$u_1(p) = \underbrace{\frac{1}{6} * \frac{1}{3} * 0}_{s=(1,4)} + \underbrace{\frac{1}{6} * \frac{2}{3} * 6}_{s=(1,5)} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2} * \frac{2}{3} * 3}_{s=(3,5)}$$

$S_1 = \{(1,0,0,0,0), (0,1,0,0,0), (0,0,1,0,0)\}$ und $S_2 = \{(0,0,0,1,0), (0,0,0,0,1)\}$

$\Delta_1 = \sigma(S_1)$ ('Dreieck'), $\Delta_2 = \sigma(S_2)$ ('Linie'), $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 = \sigma(S_1) \times \sigma(S_2)$

$T = \{\underbrace{1,3}_{T_1}, \underbrace{4,5}_{T_2}\}$ ist nicht geordnet, da $2 \notin T_1$.

$T^{'} = \{\underbrace{1,2}_{T_1}, \underbrace{4,5}_{T_2}\}$ ist geordnet. $\Rightarrow \bar{T}_1^{'} = \{1,2,3\}$

Simpliziale Unterteilung

- Ein t-dimensionaler Simplex mit Knoten (Ecken) $v_0, \ldots, v_t$ ist die konvexe Hülle $\sigma = \sigma(v_0, \ldots, v_t)$ der linear unabhängigen Punkte $\{v_0, \ldots, v_t\} \in \mathbb{R}^t$.

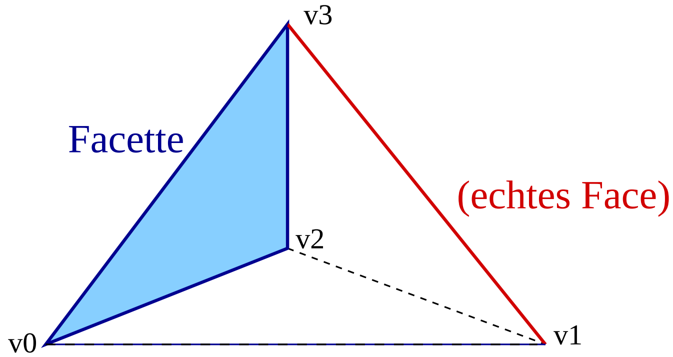
- Ein Face von σ ist ein Simplex τ, dessen Knotenmenge eine Teilmenge der Knoten in σ ist. Eine echtes Face ist ein Face, welches nicht ganz σ ist. Eine Facette τ von σ ist ein Face von σ mit genau einem Knoten weniger als σ.

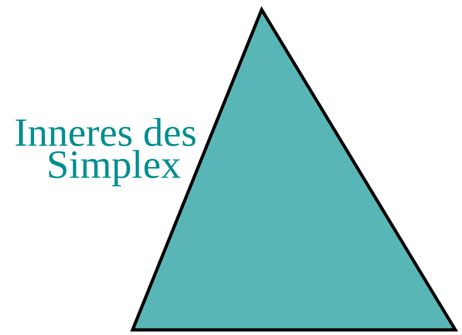
- Das Innere von σ ist die Menge der Punkte in σ, die nicht zu einem echten Face gehören.

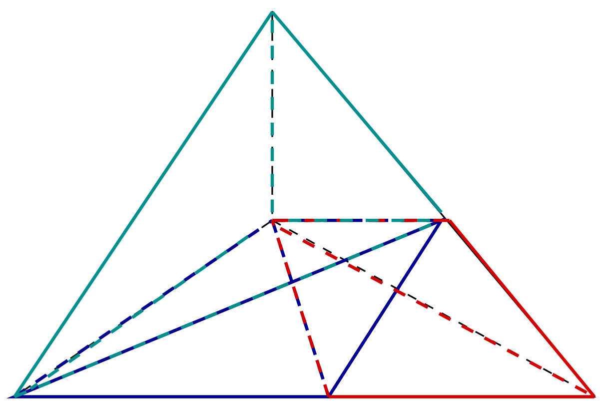
- Eine Triangulierung einer kompakten und konvexen Menge C ist eine endliche Menge G von Simplices, für die die Vereinigung der Simplices in G gleich C ist. Ausserdem gilt: falls zwei Simplices einen nichtleeren Schnitt haben, ist ihr Schnitt ein gemeinsames Face.

- Eine Triangulierung von G auf Δ induziert eine Triangulierung jedes Faces von Δ.

Simpliziale Unterteilung (Beispiel)







einfache Triangulierung eines Simplex

Simpliziale Unterteilung

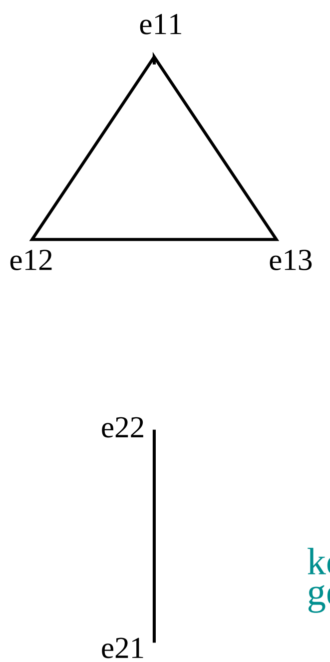
- Ein Labelfunktion auf Δ ist eine Funktion $l : \Delta \mapsto \cup_i S_i$.

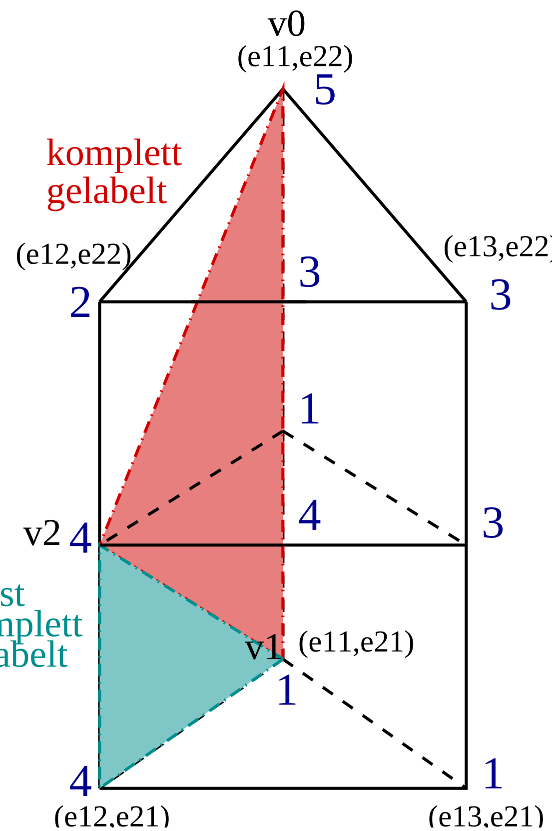
- Im Folgenden sei G eine Triangulierung von Δ, T eine geordnete Menge und $\sigma \in G$ ein Simplex in $\prod_i \sigma(\bar{T}_i)$ maximaler Dimension, so, dass σ $1 + |T|$ Knoten hat.

- σ heisst dann fast komplett gelabelt, falls die Label der Knoten von σ ganz T enthalten. Ein fast komplett gelabelter Simplex σ heisst komplett gelabelt, falls die Label der Knoten von σ $\bar{T}_i$ für ein $i \in N$ enthalten. In diesem Fall heisst σ i-stoppender Simplex.

- Ziel des Algorithmus ist es, für jede Labelfunktion l, die Sperner-proper ist, einen solchen Simplex zu finden.
  Sperner-proper: Für alle $T \subseteq \cup_i S_i$ mit $T_i \neq 0$ für alle i: $l(\prod_i \sigma(T_i)) \subseteq T$.
  Eine Labelfunktion l ist Sperner-proper, falls für jedes $v \in \Delta, v_{ij} = 0 \Rightarrow l(v) \neq e_{ij}$.

Beispiel





l([(1,0,0,0,0),(0,0,0,0,1)]) = 5
l([(o,1,0,0,0),(0,0,0,0,1)]) = 2
. . .
l([(0,0.5,0.5,0,0),(0,0,0,0.5,0.5)]) = 4
. . .

T = {1,4} ist geordnet

Simplex in
{(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0)} x {(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)}
mit drei Knoten ist z.B. gegeben durch:

v0 = ((e11),(e22)) l(v0) = 5

v1 = ((e11),(e21)) l(v1) = 1

v2 = ((0,1,0,0,0),(0,0,0,0.5,0.5)) l(v2) = 4

Der Simplex bestimmt durch v0, v1 und v2 ist komplett gelabelt.
(2−stoppender Simplex)

Adjazenz

Sei Σ_T die Menge der fast komplett gelabelten Simplices der geordneten Menge $T \subseteq S$. Sei $\Sigma = \{\cup_T \Sigma_T | T \text{ ist geordnet}\}$. Falls $\sigma \in \Sigma_T$ nicht 0-dimensional ist $(\forall i : T_i = \emptyset)$, so hat jeder Simplex $\sigma \in \Sigma_T$ mindestens eine Facette τ, die auch fast komplett gelabelt ist.

Fall 1: τ ist eine Facette eines anderen $(\sum_i |T_i|)$-dimensionalen Simplex $\sigma^{'}$ in $\prod_i \sigma(\bar{T}_i)$. Da $\tau \subset \sigma^{'}$, ist $\sigma^{'}$ fast komplett gelabelt, eventuell sogar komplett gelabelt. In diesem Fall heissen σ und $\sigma^{'}$ adjazent.

Fall 2: τ ist nicht Facette zweier Simplices maximaler Dimension in $\prod_i \sigma(\bar{T}_i)$. Dann muss sich τ an der Grenze dieser Menge befinden: $\tau \subset \sigma(\bar{T}_j - \{s_{jl}\}) \times \prod_{i \neq j} \sigma(\bar{T}_i)$ für ein j und $s_{jl} \in S_j$. Da l Sperner-proper ist, gilt: $s_{jl} \notin T$. Also muss gelten: $s_{jl} = s_{jk_j}$.

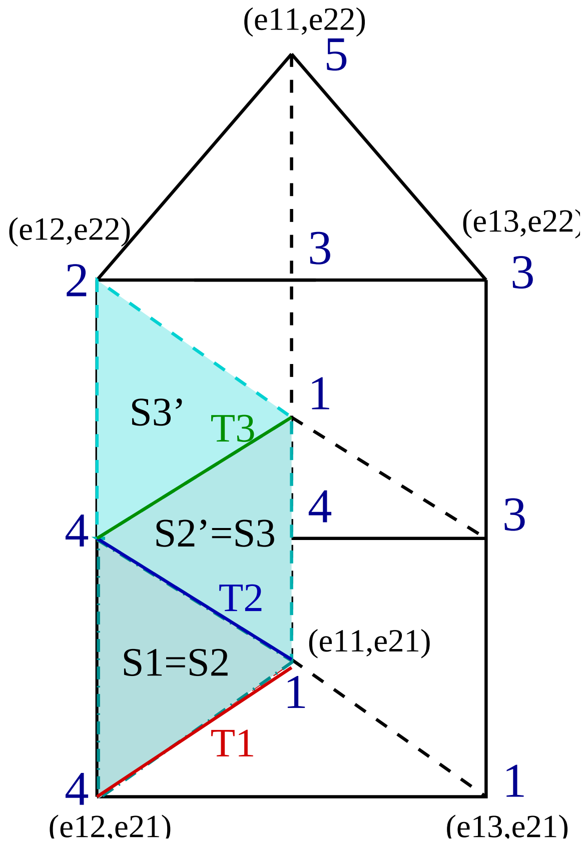
Zwei geordnete Mengen T und $T^{'}$ heissen adjazent, wenn sie sich um höchstens ein Element $s_{jk_j} \in T - T^{'}$ unterscheiden. Wenn T und $T^{'}$ adjazent sind, so sind zwei Simplices $\sigma \in \Sigma_T$ und $\tau \in \Sigma_{T^{'}}$ adjazent, falls $l(\tau) = T$ (dh: τ ist komplett gelabelt) und τ ist eine Facette von σ.

Adjazenz (Beispiel)

T1 und S1 sind adjazent
(Fall 2)

S2 und S2' sind adjazent
durch T2 (Fall 1)

S3 und S3' sind adjazent
durch T3 (Fall 1)



Adjazenz: Zusammenfassung

Gegeben sei ein Simplex $\sigma \in \Sigma_T$ und eine Facette τ von σ mit einer fast kompletten Labelmenge. Dann ist σ entweder adjazent zu τ selbst, oder zu einem anderen Simplex in Σ_T, der auch τ als Facette hat. Sei v der Knoten in $\sigma - \tau$.

Fall 1: $l(v) \in T$

Dann hat σ eine andere Facette mit einer fast kompletten Labelmenge, und σ ist adjazent zu genau zwei anderen Siplices.

Fall 2: $l(v) \notin T$

Dann ist σ komplett gelabelt. Sei $l(v) = s_{j,k_j+1}$. Dann ist σ adjazent zu dem eindeutig bestimmten fast komplett gelabelten Simplex in $\sigma(\bar{T}_j \cup \{s_{j,k_j+2}\}) \times \prod_{i \neq j} \sigma(\bar{T}_i)$, falls nicht $k_j + 1 = m_j$ ist, also die Label für σ alle puren Strategien von j enthalten.

Adjazenz: Zusammenfassung

Jeder fast komplett gelabelte Simplex $\sigma \in \Sigma_T$ für eine geordnete Menge T ist also adjazent zu höchstens zwei anderen Simplices. Ein Simplex, der zu höchstens einem anderen Simplex adjazent ist, heisst terminaler Simplex. Es folgt: Sei $\sigma \in \Sigma$ und J sei die Menge der Simplices in Σ, die erreicht werden, indem wir bei σ starten die Sequenz der Simplices durchlaufen, in der jeder Simplex adjazent zu seinem Vorgänger ist. Dann ist J:

- eine Schleife - es existiert kein terminaler Simplex, oder
- ein Weg - es existieren zwei teminale Simplices, oder
- ein Punkt - J enthält einen einzelnen (terminalen) Simplex

Ein terminaler Simplex ist entweder der 0-dimensionale Simplex σ_0, der das eindeutige Element aus $\prod_i \sigma(\bar{T}_i)$ mit $T_i = \emptyset \forall i$ ist, oder ein i-stoppender Simplex. Beides kann es nur sein, falls es ein i gibt mit $m_i = 1$. Nur in diesem Fall ist J ein Punkt. Aus diesen Überlegungen folgt, dass die Anzahl der terminalen Simplices ungerade ist. Im Folgenden nehmen wir an, dass für alle i gilt: $m_i \geq 2$.

Labelfunktion

Die bisher gewonnenen Erkenntisse liefern einen Algorithmus, um einen terminalen Simplex zu finden: Wir starten mit σ_0 und folgen der Adjazenzrelation bis zum anderen Ende des Weges. Damit ein terminaler Simplex für uns interessant ist, muss er ein Nash Equilibrium approximieren. Wir beschreiben nun eine Labelfunktion, die dieses sicherstellt. Wir haben schon gesehen, dass die Nash Equilibria genau die Fixpunkte der stetigen Funktion $y : \Delta \mapsto \Delta$ sind.

$$g_{ij}(p) = \max\left[u_i(s_{ij}, p_{-i}) - u_i(p), 0\right], \quad y_{ij}(p) = \frac{p_{ij} + g_{ij}(p)}{1 + \sum_j g_{ij}(p)}$$

Für $p \in \Delta$, definiere $l(p) = s_{ij}$, wobei (i, j) der lexikographisch kleinste Index in $\mathrm{argmin}_{\mathrm{l \in N, 1 \le k \le m_l}}\{\mathrm{y_{lk}(p) - p_{lk}}\}$ ist.

Sei $\{G^r\}_{r=1}^{\infty}$ eine Folge von Triangulierungen, deren Meshes zu 0 konvergieren. Für jedes r sei σ^r ein terminaler i-stoppender Simplex für ein i. Da es genügt, eine Teilfolge zu betrachten, nehmen wir an, dass es das gleiche i für alle r ist. Konvergiere die Folge σ^r zu einem $p^* \in \Delta$. Dann ist p^* ein Fixpunkt von y, und somit ein Nash Equilibrium.

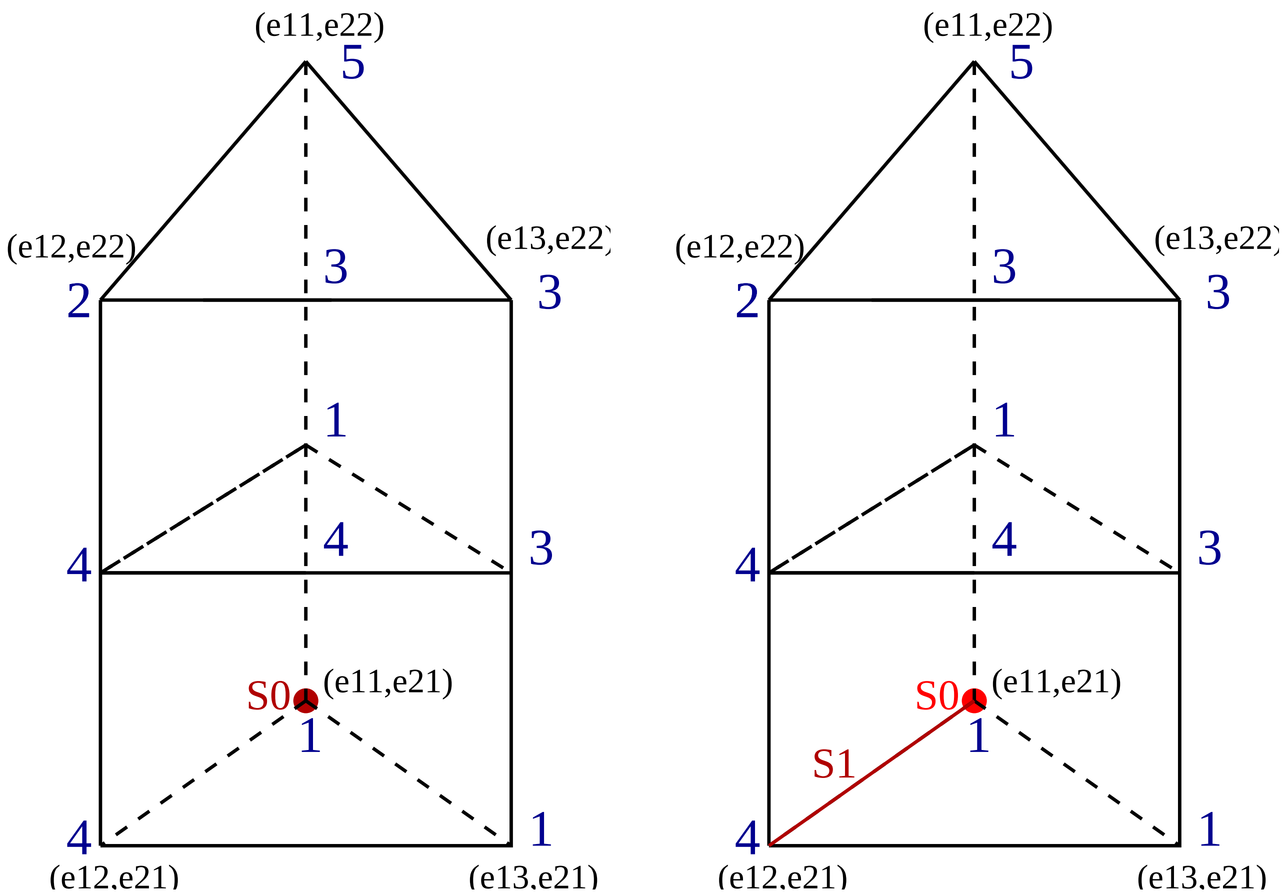
Beweis

Allgemein gilt: $\sum_k y_{lk}(p) - p_{lk} = 0$, also: $\min_{l \in N, 1 \leq k \leq m_l} \{y_{lk}(p) - p_{lk}\} \leq 0$.

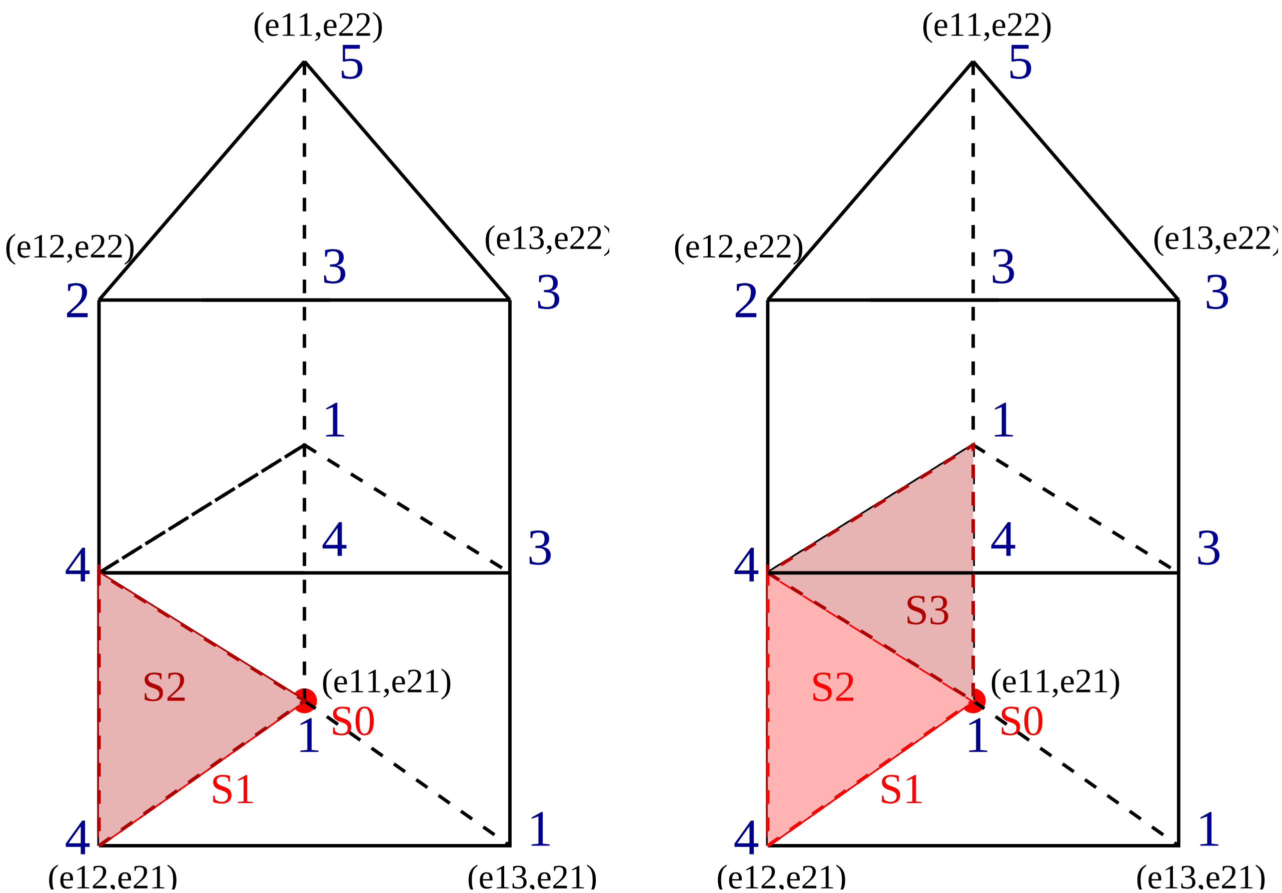
Wir haben angenommen, dass das i des terminalen i-stoppenden Simplex für alle r gleich ist. Somit gibt es für jedes $s_{ij} \in S_i$ und jedes r einen Knoten v von σ^r mit $l(v) = s_{ij}$. Dieses impliziert $y_{ij}(v) \leq v_{ij}$, und im Grenzfall $y_{ij}(p^*) \leq p^*_{ij}$ für alle $1 \leq j \leq m_i$, also $y_{ij}(p^*) = p^*_{ij}$ für alle $1 \leq j \leq m_i$.
Nach der Definition der Labelfunktion l folgt, dass $0 = \min_{l \in N, 1 \leq k \leq m_l} \{y_{lk}(p^*) - p^*_{lk}\}$. Also gilt für alle $k \in N$ und alle $1 \leq h \leq m_k$, dass $y_{kh}(p^*) \geq p^*_{kh}$. Aber dann gilt $y_{kh}(p^*) = p^*_{kh}$ für alle k und relevanten h. Also ist p^* ein Fixpunkt von y und somit ein Nash Equilibrium.

Wir haben somit einen Algorithmus beschrieben, der für ein gegebenes ε an einem Punkt $p \in \Delta$ mit $\| y(p) - p \| < \varepsilon$ hält, dh. der einen terminalen i-stoppenden Simplex auf einer Folge von immer feiner werdenden Triangulierungen von Δ findet, bis ein Knoten eines solchen Simplex das Haltekriterum erfüllt.

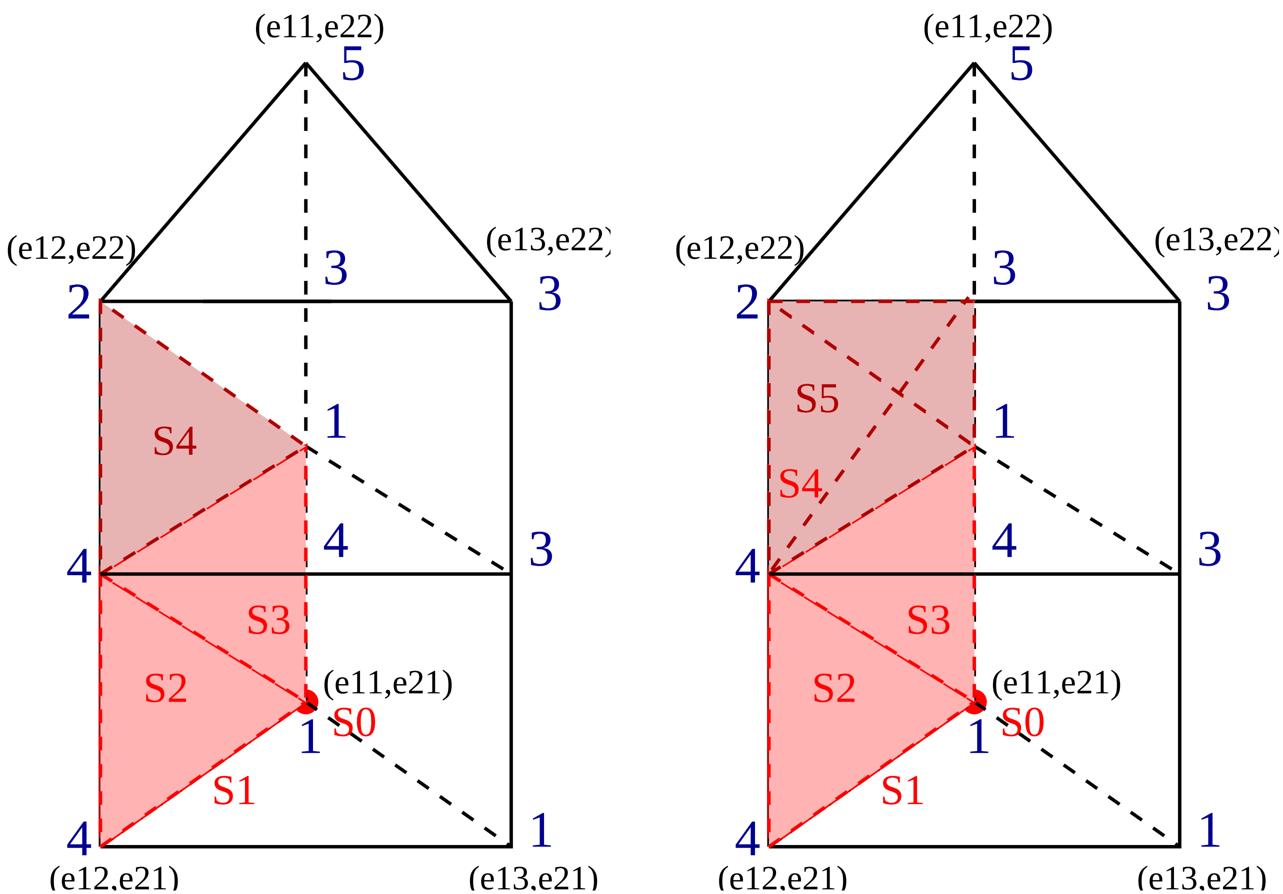
Algorithmus - Beispiel



Algorithmus - Beispiel



Algorithmus - Beispiel



Verbesserung der Triangulierung

Algorithmen, die auf Scarf's simplizialen Unterteilungsalgorithmen basieren, haben das Problem, dass sie von einer gegebenden Triangulierung abhängig sind. Falls wir eine bessere Approximation benötigen, so müssen wir ganz von vorne mit einer neuen Triangulierung mit kleineren Meshes anfangen.

Lösungsansätze:

- Homotopy Method (Eaves,1972): Die Idee ist es, eine zusätzliche Dimension zum Problem hinzuzufügen, die die Genauigkeit der Approximation repräsentiert, zum Beispiel $t \in [0, 1]$. Dann trianguliert man den Produktraum $\Delta \times [0, 1]$ so, dass wenn t sich an 1 annähert, sich die Meshgrössen der Triangulierung an 0 annähern.

- Restart Method (Merrill, Kuhn, MacKinnon, Talman, 1972-1979): Hier ist die Idee die Entwicklung von Pfad-folgenden Algorithmen, die es erlauben, an einem beliebigen Punkt im Lösungsraum zu starten. Es gibt Algorithmen, die einen Neustart an einem beliebigen Punkt im Lösungsraum mit einer Triangulierung mit kleineren Meshes ermöglichen.

Komplexität

Scarf's Algorithmus, sowie jeder andere Algorithmus, der einen Brouwer Fixpunkt basierend auf der Auswertung von Funktionswerten berechnet, hat eine worst-case Komplexität, die exponentiell in der Dimension und der Anzahl der Nachkommastellen der Genauigkeit ist. (Hirsch, Papadimitriou, Vavasis, 1989).

Für eine zugrundeliegende Funktion, die stetig differenzierbar ist und eine Lipschitz-Bedingung erfüllt, können simpliziale Unterteilungsalgorithmen quadratische Konvergenzraten (im Grenzfall) erreichen, wenn die Änderung der Meshgrösse angemessen vorgenommen wird. (Saigal, 1977)

Bemerkung:

Es gibt garantiert eine Folge von terminalen Simplices, die zu einem Nash Equilibrium konvergieren, indem wir die Triangulierung verfeinern. Aber es ist nicht garantiert, dass diese Folge der terminalen Simplices stoppende Simplices für denselben Spieler sind.