Rainer Feldmann
Joachim Gehweiler, Nicolai Hähnle,
Frank Hellweg, Martina Hüllmann,
Ulf Lorenz, Daniel Warner

Paderborn, 26.1.2007
Abgabe 5.2.2007
Kästen im Flur D3

Übung zu

Einführung in Berechenbarkeit, Komplexität und formale Sprachen

WS 2006/2007

Blatt 13

Aufgabe 36:
Zeigen oder widerlegen Sie: Die folgende Formel ϕ ist erfüllbar.

$$\begin{aligned}\phi &= (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_4 \vee x_{10}) \wedge (x_1 \vee x_9) \wedge (x_2 \vee x_9) \wedge (x_3 \vee \overline{x}_9) \wedge \\ &\quad (x_3 \vee \overline{x}_5 \vee \overline{x}_6) \wedge (\overline{x}_4 \vee \overline{x}_5) \wedge (x_4 \vee x_6) \wedge (x_5 \vee \overline{x}_9) \wedge (\overline{x}_6 \vee \overline{x}_7) \wedge (\overline{x}_6 \vee \overline{x}_{10}) \wedge (x_7 \vee x_8)\end{aligned}$$

Lassen Sie sich von Folie 168 und 169 (Implikationsgraphen) inspirieren.

Aufgabe 37:
Beim NP-vollständigen Entscheidungsproblem SAT ist eine boolesche Formel ϕ in KNF gegeben. Zu entscheiden ist, ob ϕ erfüllbar ist.
Beim Entscheidungsproblem $Integer - Programming$ sind m Ungleichungen der Form

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq d_j,\ a_{ij} \in \mathbb{Z},\ d_j \in \mathbb{Z},\ j = 1, \ldots, m$$

gegeben. Zu entscheiden ist, ob eine Belegung der Variablen x_i mit Werten aus $\mathbb{Z}$ existiert, die alle Ungleichungen erfüllt.

a) Zeigen Sie: $SAT \leq_p Integer - Programming$. Was folgt daraus?

b) Betrachten Sie den folgenden „Beweis", dass $Integer - Programming$ in NP liegt:

> Folgende nichtdeterministische Turingmaschine entscheidet $Integer - Programming$:
>
> 1. Rate nichtdeterministisch eine Belegung für die x_i.
> 2. Prüfe, ob diese Belegung die gegebenen Ungleichungen erfüllt. Falls ja: Akzeptiere.
>
> Wenn es eine passende Belegung der Variablen gibt, wird sie von dieser NTM gefunden und die NTM akzeptiert. Außerdem akzeptiert die NTM nur, wenn eine passende Belegung gefunden wurde. Also arbeitet die NTM korrekt.
>
> Da jeder Schritt nur polynomielle Zeit benötigt, benötigt die NTM insgesamt nur polynomielle Zeit. Daraus folgt, dass $Integer - Programming$ in NP liegt.

Was ist an diesem Beweis falsch?

Aufgabe 38:
Beim Problem $HAMKREIS$ ist ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ gegeben. Zu entscheiden ist, ob G einen Hamiltonkreis enthält. Ein Hamiltonkreis ist ein Kreis, der jeden Knoten genau einmal enthält.
Zeigen Sie: $HAMKREIS$ ist NP-vollständig.

Aufgabe 39: ($\star$)
Beim Problem $BürgerlichesLeben$ sind drei Mengen gegeben: Frauen F, Männer M und Häuser H, wobei $|F| = |M| = |H| = k$ gilt. Außerdem ist eine Menge von Präferenzen $P \subseteq F \times M \times H$ gegeben. Eine Frau f, ein Mann m und ein Haus h passen genau dann zusammen, wenn $(f, m, h) \in P$ gilt. Zu entscheiden ist, ob jede Frau, jeder Mann und jedes Haus in eine passende Beziehung gegeben werden kann, wobei natürlich niemand in zwei Beziehungen gleichzeitig sein darf. Formal ist also zu entscheiden, ob es eine Teilmenge $P' \subseteq P$ gibt, so dass jede Frau, jeder Mann und jedes Haus genau einmal in einem Tupel aus P' vorkommt.
Zeigen Sie: $BürgerlichesLeben$ ist NP-vollständig.

Anleitung:

1. Zeigen Sie: $BürgerlichesLeben$ liegt in NP.
2. Versuchen Sie eine Reduktion von $HAMKREIS$ auf $BürgerlichesLeben$, indem Sie die Knoten zu Frauen und Männern und die Kanten zu Präferenzen machen.
3. Beobachten Sie, dass sich aus jedem Hamiltonkreis eine Lösung von $BürgerlichesLeben$ ergibt, aber Lösungen von $BürgerlichesLeben$ nicht unbedingt einem Hamiltonkreis entsprechen: Sie können auch mehreren kleinen Kreisen entsprechen.
4. Verwenden Sie die Häuser, um die Kanten des Kreises zu nummerieren und fixieren Sie einen Startknoten. Die Anzahl der Präferenzen wird groß (bleibt aber polynomiell!).
5. Vervielfältigen Sie die Frauen und Männer und markieren Sie sie mit allen möglichen Kantennummern.
6. Überlegen Sie, wie Sie die Frauen und Männer, die für den Kreis nicht benötigt werden, unter die Haube bringen können. Passen Sie die Präferenzen dabei so an, dass keine kleinen Kreise mehr entstehen können.