

Übung zu
**Einführung in Berechenbarkeit, Komplexität und
formale Sprachen**
WS 2006/2007
Blatt 9

Aufgabe 26: Es seien Σ_0 und Σ_1 Alphabete, die das Blanksymbol B nicht enthalten und $f : \Sigma_0^* \rightarrow \Sigma_1^*$ eine bijektive Abbildung. Beweisen Sie, dass die Abbildung f genau dann berechenbar ist, wenn ihre Umkehrabbildung f^{-1} berechenbar ist.

Hinweis: Eine Abbildung $f : \Sigma_0^* \rightarrow \Sigma_1^*$ heißt *berechenbar*, wenn eine DTM existiert, die sie berechnet.

Aufgabe 27: Beweisen Sie, dass die durch

$$f(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls ein } p \in \mathbb{N}, p \geq n \text{ existiert, sodass } p \text{ und } p+2 \text{ Primzahlen sind,} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Abbildung $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1\}$ berechenbar ist.

Hinweis: Zwei Primzahlen p_1 und p_2 deren Differenz $|p_1 - p_2| = 2$ ist, heißen *Primzahlzwillinge*. Es ist unbekannt (!), ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt.

Aufgabe 28:

1. Konstruieren Sie eine DTM M_1 , die die totale Funktion $\text{ggT} : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$, d.h. den größten gemeinsamen Teiler zweier natürlicher Zahlen berechnet. Sie können dabei z.B. auf den euklidischen Algorithmus zurückgreifen. Die Übergangsfunktion ihrer DTM M_1 ist formal anzugeben!

2. Die totale Funktion $\text{fib} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ sei durch die Vorschrift

$$\text{fib}(n) := \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0, \\ 1, & \text{falls } n = 1, \\ \text{fib}(n-1) + \text{fib}(n-2) & \text{falls } n \geq 2 \end{cases}$$

definiert. Dabei bezeichnet $\text{fib}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die n .te Fibonacci-Zahl. Beschreiben Sie eine DTM M_2 , die die Funktion fib berechnet.

3. Beschreiben Sie eine DTM M , die die durch

$$\varphi(n) := \text{ggT}(\text{fib}(n+1), \text{fib}(n))$$

definierte Abbildung $\varphi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ berechnet. Sie dürfen dabei (müssen aber nicht) die DTMs M_1 und M_2 aus den Aufgabenteilen 1) und 2) verwenden.

Hinweis: Sie dürfen Mehrband-Turingmaschinen verwenden.