

1. Klausur

zu

Einführung in Berechenbarkeit, Komplexität und formale Sprachen

WS 2006/2007

Name :

Matrikelnummer :

Punkteverteilung (bitte freilassen!)

Formale Sprachen		
Aufgabe 1		von 20
Aufgabe 2		von 20
Aufgabe 3		von 20
Aufgabe 4		von 12
Summe		von 72

Berechenbarkeit+Komplexität		
Aufgabe 5		von 20
Aufgabe 6		von 20
Aufgabe 7		von 20
Aufgabe 8		von 18
Summe		von 78

Gesamtsumme		von 150
-------------	--	---------

Die Klausur besteht aus 8 Aufgaben und 27 Seiten. Es können insgesamt 150 Punkte erreicht werden. Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihre Matrikelnummer.

Teilnehmer, die nur den Teil "Berechenbarkeit+Komplexität" abdecken wollen, bearbeiten bitte nur die Aufgaben 5,6,7,8. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Die Seiten 25-28 sind Konzeptpapier und werden nicht bewertet.

Zugelassene Hilfsmittel: Ein Blatt DIN A4, handschriftlich beidseitig beschrieben.

Schreiben Sie Ihre Lösung bitte an den dafür vorgesehenen Platz. Sollte der Platz nicht ausreichen, erhalten Sie auf Anfrage weiteres Papier.

Aufgabe 1 (20 Punkte) [FS:Chomsky Normalform]

Gegeben ist die folgende kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{A, B, C, D, E, F, S\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ und

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aAa \mid bEb \mid aB \quad , \quad C \rightarrow aC \mid Ea \mid aEb \mid F \\ A \rightarrow AbA \mid \varepsilon \quad , \quad D \rightarrow ABC \mid aBa \\ B \rightarrow bBb \mid aBa \quad , \quad E \rightarrow a \mid bb \\ F \rightarrow bbC \end{array} \right\}$$

Konstruieren Sie eine äquivalente Grammatik \tilde{G} in Chomsky-Normalform. Halten Sie sich dabei exakt an die folgende Reihenfolge:

1. ε -Regeln entfernen.
2. Grammatik reduzieren.
3. Grammatik separieren.
4. Kettenregeln entfernen.
5. Grammatik nochmal reduzieren.
6. Regeln verkürzen.

Geben Sie die Menge der Produktionen nach jedem Schritt 1. bis 6. vollständig an.

P nach Schritt 1 (ε -Regeln entfernen):

P nach Schritt 2 (Grammatik reduzieren):

P nach Schritt 3 (Grammatik separieren):

P nach Schritt 4 (Kettenregeln entfernen):

P nach Schritt 5 (Grammatik reduzieren):

P nach Schritt 6 (Regeln verkürzen):

Matrikelnummer:

19.02.2007

Zusätzlicher Platz für die Lösung der Aufgabe 1:

Aufgabe 2 [FS:CYK-Algorithmus] (20 Punkte)

Gegeben ist die folgende kontextfreie Grammatik

$G = (V, \Sigma, P, S)$ in CNF mit $V = \{A, B, C, D, E, F, S\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ und

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow AB \quad , \quad C \rightarrow a \\ A \rightarrow CD \mid CF \quad , \quad D \rightarrow b \\ B \rightarrow c \mid EB \quad , \quad E \rightarrow c \\ F \rightarrow AD \end{array} \right\}$$

Geben Sie eine vollständige formale Definition der Mengen in den Feldern der vom Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus verwendeten Tabelle an.

--

Geben Sie das Kriterium an, anhand dessen der Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus entscheidet, ob $w \in L(G)$ ist.

--

Führen Sie auf nachfolgender Tabelle den Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus aus um zu entscheiden, ob das Wort $w = aaabbcc$ ein Wort der Sprache $L(G)$ ist.

	a	a	a	b	b	b	c	c
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								

Ersatztable für einen zweiten Versuch von Aufgabe 2 (gültige Lösung bitte eindeutig kennzeichnen):

	a	a	a	b	b	b	c	c
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								

Aufgabe 3 [FS:DEA] (20 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Der DEA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ sei gegeben durch

$$Q = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \Sigma\}$$

$$q_0 = (a, a, a)$$

$$F = \{(b, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \Sigma\}$$

und die Übergangsfunktion

$$\begin{aligned} \delta : Q \times \Sigma &\rightarrow Q \\ ((x_1, x_2, x_3), x) &\mapsto (x_2, x_3, x) \end{aligned}$$

- a) Beweisen Sie: Für alle $w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^*$ gilt: $\delta^*(q_0, w) = (w_{n-2}, w_{n-1}, w_n)$, wobei Sie zur Vereinfachung $w_{-2} = w_{-1} = w_0 = a$ benutzen dürfen.
- b) Geben Sie $L(M)$ formal an und begründen Sie die Korrektheit Ihrer Wahl.

Matrikelnummer:

19.02.2007

Zusätzlicher Platz für die Lösung der Aufgabe 3:

Aufgabe 4 [FS:Multiple Choice](12 Punkte)

Beantworten Sie die folgenden Fragen ohne Begründung. Für jede richtige Antwort gibt es einen Pluspunkt, für jede falsche einen Minuspunkt. Nicht beantwortete Fragen erhalten 0 Punkte. Sie können insgesamt für diese Aufgabe nicht weniger als 0 Punkte erreichen.

1. Sei $L_1 \subseteq \{0, 1\}^*$ regulär, $L_2 \subseteq \{0, 1\}^*$ kontextfrei.
 - (a) Dann ist auch \bar{L}_1 regulär.
 Richtig Falsch
 - (b) Dann gibt es eine kontextfreie Grammatik G , die L_1 erzeugt.
 Richtig Falsch
 - (c) Für alle $L_3 \subseteq L_1$ gilt: L_3 ist regulär.
 Richtig Falsch
 - (d) Es gilt: $(L_1 \cup L_2)^*$ ist kontextfrei.
 Richtig Falsch

2. Seien $L_4, L_5 \subseteq \{0, 1\}^*$ kontextfrei.
 - (a) Dann ist auch \bar{L}_4 kontextfrei.
 Richtig Falsch
 - (b) Für alle $L_6 \subseteq L_4$ gilt: L_6 ist kontextfrei.
 Richtig Falsch
 - (c) Falls L_4 endlich viele Elemente hat, dann ist L_4 regulär.
 Richtig Falsch
 - (d) Es gilt: $(L_4 \cap L_5)^*$ ist kontextfrei.
 Richtig Falsch

3. Sei $L_1 \subseteq \{0, 1\}^*$ regulär, $L_2 \subseteq \{0, 1\}^*$ kontextfrei, h ein Homomorphismus.
 - (a) Dann ist auch $h(L_1)$ regulär.
 Richtig Falsch
 - (b) Dann ist auch $h(L_2)$ kontextfrei.
 Richtig Falsch
 - (c) Dann ist auch $h^{-1}(L_1)$ regulär.
 Richtig Falsch
 - (d) Dann ist auch $h^{-1}(L_2)$ kontextfrei.
 Richtig Falsch

Ersatztable für einen zweiten Versuch von Aufgabe 4 (gültige Lösung bitte eindeutig kennzeichnen):

1. Sei $L_1 \subseteq \{0, 1\}^*$ regulär, $L_2 \subseteq \{0, 1\}^*$ kontextfrei.
 - (a) Dann ist auch \bar{L}_1 regulär.
 Richtig Falsch
 - (b) Dann gibt es eine kontextfreie Grammatik G , die L_1 erzeugt.
 Richtig Falsch
 - (c) Für alle $L_3 \subseteq L_1$ gilt: L_3 ist regulär.
 Richtig Falsch
 - (d) Es gilt: $(L_1 \cup L_2)^*$ ist kontextfrei.
 Richtig Falsch

2. Seien $L_4, L_5 \subseteq \{0, 1\}^*$ kontextfrei.
 - (a) Dann ist auch \bar{L}_4 kontextfrei.
 Richtig Falsch
 - (b) Für alle $L_6 \subseteq L_4$ gilt: L_6 kontextfrei.
 Richtig Falsch
 - (c) Falls L_4 endlich viele Elemente hat, dann ist L_4 regulär.
 Richtig Falsch
 - (d) Es gilt: $(L_4 \cap L_5)^*$ ist kontextfrei.
 Richtig Falsch

3. Sei $L_1 \subseteq \{0, 1\}^*$ regulär, $L_2 \subseteq \{0, 1\}^*$ kontextfrei, h ein Homomorphismus.
 - (a) Dann ist auch $h(L_1)$ regulär.
 Richtig Falsch
 - (b) Dann ist auch $h(L_2)$ kontextfrei.
 Richtig Falsch
 - (c) Dann ist auch $h^{-1}(L_1)$ regulär.
 Richtig Falsch
 - (d) Dann ist auch $h^{-1}(L_2)$ kontextfrei.
 Richtig Falsch

Aufgabe 5 [BK:DTM] (20 Punkte)

Beschreiben Sie in algorithmischer Form die Arbeitsweise einer deterministischen Mehrband-TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$, die die Sprache

$$L = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ akzeptiert mindestens zwei Eingaben} \}$$

akzeptiert.

Matrikelnummer:

19.02.2007

Zusätzlicher Platz für die Lösung der Aufgabe 5:

Aufgabe 6 [BK:polynomielle Reduktion] (20 Punkte)

Wir betrachten hier nur ungerichtete Graphen.

Für einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine *Clique* von G eine Teilmenge U der Knoten von V , so dass für alle $u, v \in U$ gilt: $\{u, v\} \in E$.

$\text{CLIQUE} = \{ \langle G, k \rangle \mid G = (V, E) \text{ enthält eine Clique der Größe } k \}$ ist \mathcal{NP} -vollständig.

Sei $\text{HALBECLIQUE} = \{ \langle G \rangle \mid G = (V, E) \text{ enthält eine Clique der Größe } \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor \}$.

Beweisen Sie: HALBECLIQUE ist \mathcal{NP} -vollständig.

Hinweis: Zeigen Sie $\text{CLIQUE} \leq_p \text{HALBECLIQUE}$ durch Reduktion und unterscheiden Sie dabei die beiden Fälle, dass ein Graph G mehr als $2k$ Knoten hat bzw. dass G höchstens $2k$ Knoten hat. Es reicht, wenn Sie die Reduktionsfunktion für gültige Eingaben des Ausgangsproblems angeben.

Matrikelnummer:

19.02.2007

Zusätzlicher Platz für die Lösung der Aufgabe 6:

Aufgabe 7 [BK:Approximation] (20 Punkte)

Wir betrachten hier nur ungerichtete Graphen.

Für einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist eine *unabhängige Menge* von G eine Teilmenge U der Knoten von V , so dass für alle $u, v \in U$ gilt: $\{u, v\} \notin E$. Eine *maximum-unabhängige Menge* ist eine unabhängige Menge $U \subseteq V$, so dass für alle unabhängigen Mengen $W \subseteq V$ gilt $|W| \leq |U|$.

Betrachten Sie das folgende

Problem INDEPENDENTSET:

geg.: ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.

ges.: eine maximum-unabhängige Menge U .

und den folgenden Approximationsalgorithmus für INDEPENDENTSET:

```

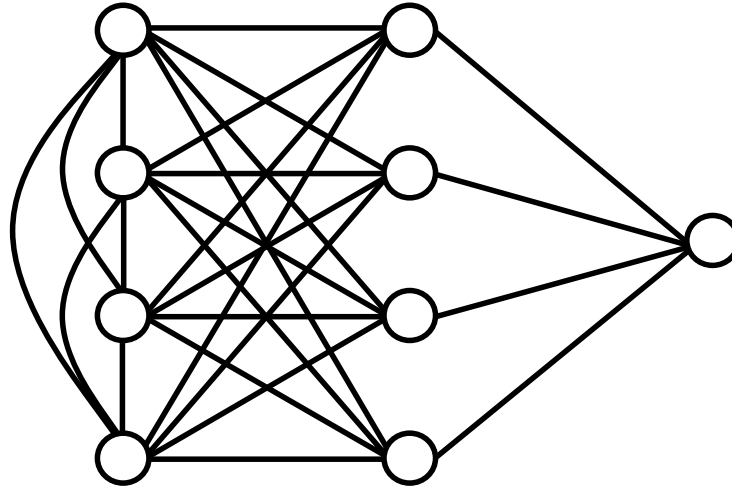
GREEDYIS( $G = (V, E)$ ) {
   $U = \emptyset$ ;
  while  $G$  hat Knoten {
    wähle Knoten  $u$  von  $G$  mit minimalem Grad in  $G$ ;
     $U = U \cup \{u\}$ ;
    lösche  $u$  und alle Nachbarn von  $u$  aus  $G$ ;
  } /* while ... */
  return  $U$ ;
}

```

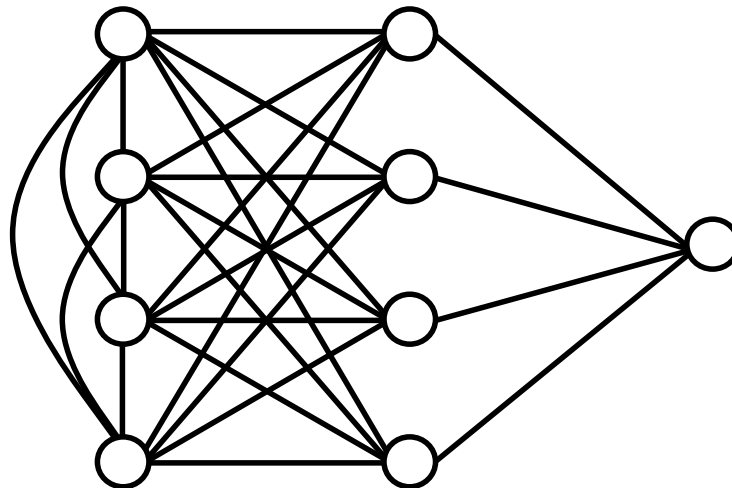
Beschreiben Sie die Lösungen zu den folgenden Teilaufgaben auf den nächsten Seiten:

- Markieren Sie eine maximum-unabhängige Menge U im Beispielgraphen auf der nächsten Seite.
- Markieren Sie eine von GREEDYIS gelieferte Menge U im Beispielgraphen auf der nächsten Seite.
- Beweisen Sie: GREEDYIS liefert eine unabhängige Menge U zurück.
- Beweisen Sie: Für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gibt es Graphen G mit n Knoten, so dass $R_{\text{GREEDYIS}}(G) \geq \frac{n-1}{4}$ ist.

a) Markieren Sie eine maximum-unabhängige Menge U im folgenden Graphen.



b) Markieren Sie die von GREEDYIS gelieferte Menge U im folgenden Graphen.



c) Beweisen Sie: GREEDYIS liefert eine unabhängige Menge U zurück.

- d) Beweisen Sie: Für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gibt es Graphen G mit n Knoten, so dass $R_{\text{GREEDYIS}}(G) \geq \frac{n-1}{4}$ ist.

Zusätzlicher Platz für die Lösung der Aufgabe 7:

Matrikelnummer:

19.02.2007

Zusätzlicher Platz für die Lösung der Aufgabe 7:

Aufgabe 8 [BK:Multiple Choice](18 Punkte)

Beantworten Sie die folgenden Fragen ohne Begründung. Für jede richtige Antwort gibt es 2 Pluspunkte, für jede falsche 2 Minuspunkte. Nicht beantwortete Fragen erhalten 0 Punkte. Sie können insgesamt für diese Aufgabe nicht weniger als 0 Punkte erreichen.

1. Das Halteproblem ist \mathcal{NP} -vollständig.
 Richtig Falsch
2. Es gibt Probleme in \mathcal{NP} , die deterministisch in polynomieller Zeit entschieden werden können.
 Richtig Falsch
3. Alle \mathcal{NP} -harten Probleme, können nichtdeterministisch in polynomieller Zeit entschieden werden.
 Richtig Falsch
4. Aus $L_1 \in \mathcal{NP}$ und $L_2 \in \mathcal{NP}$ folgt: $L_1 \leq_p L_2$.
 Richtig Falsch
5. Aus L_3 rekursiv aufzählbar und L_4 rekursiv aufzählbar folgt: $L_3 \leq L_4$.
 Richtig Falsch
6. Sei $L_6 \subseteq \{0, 1\}^*$ und das Wortproblem für L_6 liege in \mathcal{NP} . Dann gilt: L_6 und \bar{L}_6 sind rekursiv aufzählbar.
 Richtig Falsch
7. Vorausgesetzt $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$: Falls es einen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit für 2SAT gibt, dann gibt es auch einen für 3COL.
 Richtig Falsch
8. Sei $L_8 = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ ist DTM und } M \text{ akzeptiert nur seine eigene Kodierung} \}$. Nach dem Satz von Rice ist L_8 nicht rekursiv aufzählbar.
 Richtig Falsch
9. Das Problem Subset-Sum ist definiert als

$$\text{SUBSETSUM} = \{ \langle a, S \rangle \mid a \in \mathbb{N}^n, S, n \in \mathbb{N} : \exists x \in \{0, 1\}^n \text{ mit } \sum_{i=1}^n a_i x_i = S \}$$

Angenommen, es gibt einen Algorithmus für SUBSETSUM, der eine Laufzeit von $O(n \cdot S)$ hat. Dann gilt $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

- Richtig Falsch

Ersatztablelle für einen zweiten Versuch von Aufgabe 8 (gültige Lösung bitte eindeutig kennzeichnen):

1. Das Halteproblem ist \mathcal{NP} -vollständig.
 Richtig Falsch
2. Es gibt Probleme in \mathcal{NP} , die deterministisch in polynomieller Zeit entschieden werden können.
 Richtig Falsch
3. Alle \mathcal{NP} -harten Probleme, können nichtdeterministisch in polynomieller Zeit entschieden werden.
 Richtig Falsch
4. Aus $L_1 \in \mathcal{NP}$ und $L_2 \in \mathcal{NP}$ folgt: $L_1 \leq_p L_2$.
 Richtig Falsch
5. Aus L_3 rekursiv aufzählbar und L_4 rekursiv aufzählbar folgt: $L_3 \leq L_4$.
 Richtig Falsch
6. Sei $L_6 \subseteq \{0, 1\}^*$ und das Wortproblem für L_6 liege in \mathcal{NP} . Dann gilt: L_6 und \bar{L}_6 sind rekursiv aufzählbar.
 Richtig Falsch
7. Vorausgesetzt $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$: Falls es einen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit für 2SAT gibt, dann gibt es auch einen für 3COL.
 Richtig Falsch
8. Sei $L_8 = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ ist DTM und } M \text{ akzeptiert nur seine eigene Kodierung} \}$. Nach dem Satz von Rice ist L_8 nicht rekursiv aufzählbar.
 Richtig Falsch
9. Das Problem Subset-Sum ist definiert als

$$\text{SUBSETSUM} = \{ \langle a, S \rangle \mid a \in \mathbb{N}^n, S, n \in \mathbb{N} : \exists x \in \{0, 1\}^n \text{ mit } \sum_{i=1}^n a_i x_i = S \}$$

Angenommen, es gibt einen Algorithmus für SUBSETSUM, der eine Laufzeit von $O(n \cdot S)$ hat. Dann gilt $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

Richtig Falsch

Konzeptpapier (wird nicht bewertet)

Konzeptpapier (wird nicht bewertet)

Konzeptpapier (wird nicht bewertet)

Konzeptpapier (wird nicht bewertet)