7 Das duale Problem, komplementärer Schlupf

Satz 7.3: Es sei (L): $Ax \leq b$, $c^T x \to \max$ ein LP. D := dual(L). x^* ist optimale Lösung von L und u^* ist optimale Lösung von D, genau dann wenn

$$(A^T u^* - c)^T x^* = 0 \text{ und } (b - Ax^*)^T u^* = 0 \quad (*)$$

Weil $(A^T u^* - c) \geq 0$, $x^* \geq 0$, $(b - Ax^*) \geq 0$ und $u^* \geq 0$, heisst das:

$(A^T u^* - c)_i = 0$ oder $x^*_i = 0$, für alle $i = 1,\ldots,n$

und $(b - Ax^*)_j = 0$ oder $u^*_j = 0$, für alle $j = 1,\ldots,m$

Bew.: Für alle zulässigen u und x gilt:

(**) $c^T x \leq u^T A x$ und $u^T A x \leq u^T b = b^T u$ (vgl. Folie 85), also

$c^T x \leq u^T A x \leq b^T u$

Also: Wenn (*) gilt, gilt die Gleichheit: $c^T x = u^T A x = b^T u$

Umgekehrt: Wenn $c^T x = b^T u$ gilt, gilt für (**) jeweils die Gleichheit, und das heisst: $(A^T u^* - c)^T x^* = 0$ und $(b - Ax^*)^T u^* = 0$

7 Das duale Problem, komplementärer Schlupf

Satz 7.3: Es sei (L): $Ax \leq b$, $c^T x \rightarrow \max$ ein LP. $D := \text{dual}(L)$. x^* ist optimale Lösung von L und u^* ist optimale Lösung von D, genau dann wenn
$(A^T u^* - c)^T x^* = 0$ und $(b - Ax^*)^T u^* = 0$ (*)

Weil $(A^T u^* - c) \geq 0$, $x^* \geq 0$, $(b - Ax^*) \geq 0$ und $u^* \geq 0$, heisst das:

$(A^T u^* - c)_i = 0$ oder $x^*_i = 0$, für alle $i = 1,\ldots,n$

und $(b - Ax^*)_j = 0$ oder $u^*_j = 0$, für alle $j = 1,\ldots,m$

Bemerkung: D.h.: Zulässige Lösungen eines primal-dualen Paares sind genau dann optimal, wenn

i) eine Variable im einen Problem 0 ist, wann immer die dazugehörige Slackvariable im anderen echt positiv ist (d.h., die dazugehörige Ungleichung ist echt erfüllt), und

ii) eine Slackvariable 0 ist, (also, die dazugehörige Ungleichung als Gleichung erfüllt ist,) wann immer die dazugehörige Variable im Schwesterproblem echt positiv ist.)

7 Modellierung (A)

(größtenteils entnommen: Suhl, Mellouli. Optimierungssysteme)

- Viele Aufgabenstellungen lassen sich als lineare oder (gemischt-) ganzzahlige Programme formulieren und lösen.
  (auch wenn es oft erstmal nicht danach aussieht)

- Verschiedenste Entscheidungssituationen könne mit Hilfe von linearen Restriktionen modelliert werden.
  Oft auch hilfreich: logische 0/1 Variablen
  (z.B.: eine Maschine kann ein- oder ausgeschaltet sein.)

- linear, weil: Wir wollen nicht nur modellieren, sondern auch lösen.

Beispiel:

geg: Betrieb mit Mehrschichtarbeit. Bedarf:

0 – 4 Uhr: 3 Personen
12 – 16 Uhr: 8 Personen
4 – 8 Uhr: 8 Personen
16 – 20 Uhr: 14 Personen
8 – 12 Uhr: 10 Personen
20 – 24 Uhr: 5 Personen

ges: Tageseinsatzplan mit minimaler Anzahl Mitarbeiter; bei 8h-Schichten

Wieviele Mitarbeiter werden benötigt?

Vorschlag 1:

x_i bezeichne die Anzahl der Mitarbeiter, die in den Schichten benötigt werden.

$$\text{Min } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

udN.

$$\begin{pmatrix} x_1 & & & & & \\ & x_2 & & & & \\ & & x_3 & & & \\ & & & x_4 & & \\ & & & & x_5 & \\ & & & & & x_6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geq \\ \geq \\ \geq \\ \geq \\ \geq \\ \geq \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 10 \\ 8 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$c = (1, 1, 1, 1, 1,1)$

7 Modellierung

so geht es also nicht, denn

- Werte der x_i ergeben keine Lösung des Problems (in Zielfunktion werden Mitarbeiter mehrfach gezählt)
- 8h-Schichten sind gar nicht modelliert.

Fragen, die man sich stellen sollte:

- **Was soll ich entscheiden?**
  (Bsp.: Wie viel soll produziert werden, oder ob ein Projekt durchgeführt werden soll)
- **Wie sehen dann die Entscheidungsvariablen aus?**
  - kontinuierlich, ganzzahlig?
  - reichen sie aus, um alle problemspezifischen Nebenbedingungen sowie die Zielsetzung ausdrücken zu können?

Dennoch: Modellieren ist ein kreativer Prozess.

Beispiel: (Schichtarbeit)

Für das Mehrschichtenbeispiel von Folie 94 könnte man:

- **x_i** als **Anzahl Mitarbeiter** auffassen, die zu Beginn von Schicht i (i = 1,...,6) **anfangen** zu arbeiten.
  (1 : 0 bis 4 Uhr, 2: 4 bis 8 Uhr,...,6: 20 bis 24 Uhr)
- mit diesen x_i kann man die 8h-Schacht-Nebenbedingung realisieren.

Vorschlag 2:

x_i bezeichne die Anzahl der Mitarbeiter, die in den Schichten zu arbeiten beginnen.

$$\text{Min } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$\text{udN.} \quad \begin{pmatrix} x_1 & & & & & + x_6 \\ x_1 & + x_2 & & & & \\ & x_2 & + x_3 & & & \\ & & x_3 & + x_4 & & \\ & & & x_4 & + x_5 & \\ & & & & x_5 & + x_6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \geq \\ \geq \\ \geq \\ \geq \\ \geq \\ \geq \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 10 \\ 8 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix}$$

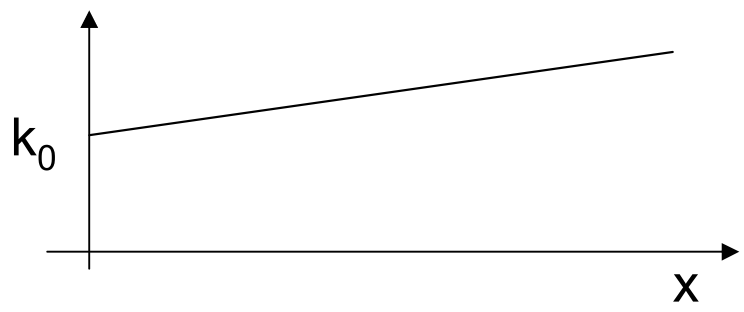
Lsg: $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 5$, $x_4 = 3$, $x_5 = 11$, $x_6 = 0$
$z = 27$

7 Modellierung (B)

Typische Teil-Formulierungen:

Fixkosten:

Bsp.: $k(x) = \begin{cases} 0, \text{ für } x = 0 \\ k_0 + cx, \text{ für } x > 0 \end{cases}$



Zur Modellierung können wir zunächst eine 0/1-Variable einführen:

$$y = \begin{cases} 0, \text{ wenn } x = 0 \\ 1, \text{ wenn } x > 0 \end{cases}$$

Dann läßt sich die Zielfunktion geschlossen darstellen als

$$\min k(x,y) = k_0 y + cx$$
$$x \geq 0,\ y \in \{0,1\}$$

zusätzliche Nebenbedingung: $x \leq My$ mit M so groß, dass für y=1 der Wertebereich von x nicht eingeschränkt wird. (big-M)

Achtung: big-M Einsatz gilt als kritisch (wegen numerischer Instabilität).

7 Modellierung

Typische Teil-Formulierungen, Bsp. Landwirtschaft:

Bauernhof habe 100 ha Land und kann

a) Viehzucht betreiben und/oder
b) Getreide pflanzen oder
c) Gemüse pflanzen

Im Fall a) - werden pro 100 Rinder 1 ha Land benötigt.
- betragen die Investitionskosten 200 GE pro Periode
- beträgt der Periodenertrag je 100 Rinder 25 GE
- betragen die sonstigen Periodenkosten pro 100 Rinder 8 GE

Im Fall b) – müssen Maschinen angeschafft werden: 100 GE pro Periode
- beträgt der Periodenertrag je ha 18 GE
- betragen die Periodenkosten je ha 4GE

Im Fall c) – betragen Ertrag je ha und Periode 30 GE
- betragen die Periodenkosten 7 GE je ha
- maximal 20 ha Gemüse kann angebaut werden (Personalmangel)

Alle Kombinationen außer Viehzucht plus Gemüseanbau sind erlaubt.

7 Modellierung

Typische Teil-Formulierungen, Bsp. Landwirtschaft:
Entscheidungsvariablen:

$R, G, M \geq 0$:
- R: Anzahl ha für Rinderzucht
- G: Anzahl ha für Getreideanbau
- M: Anzahl ha für Gemüseanbau

Um Alternativen der Art „wird angebaut oder nicht“ formulieren zu können, führen wir binäre Hilfsvariablen ein:

$Y_R = 1$ g.d.w. Rinderzucht wird betrieben
$Y_G = 1$ g.d.w. Getreideanbau wird betrieben
$Y_M = 1$ g.d.w. Gemüseanbau wird betrieben

Typische Teil-Formulierungen, Bsp. Landwirtschaft:
Restriktionen:

$$R + G + M \leq 100$$
$$R \leq 100Y_R$$
$$G \leq 100Y_G$$
$$M \leq 20Y_M$$

$Y_R + Y_M \leq 1$ (Viehzucht und Gemüse schließen sich aus)

Zielfunktion:

$$\max\ (25-8)R + (18-4)G + (30-7)M - 200Y_R - 100Y_G$$

(0/1-Variablen werden benutzt, um abhängig von einer Projektdurchführung die damit verbundenen Investitionskosten abziehen zu können)

7 Modellierung (C)

Typische Teil-Formulierungen:

Schwellenwerte: Manche Produkte können nur ab einer bestimmten Mindestmenge gekauft, produziert oder verkauft werden. Z.B. Werbezeit im Fernsehen.
D.h.: Wert einer Variablen ist entweder 0, oder größer als ein Mindestwert.

Also: kontinuierliche Variable x kann Wert zwischen X_L (> 0) und X_U (> 0) annehmen, oder 0 sein.

Man nehme: eine 0/1-Hilfsvariable y und erzeuge als Nebenbedingungen:

$x \leq X_U y$ (erzwingt, dass $x = 0$, falls $y = 0$ ist; sonst $x \leq X_U$)
$x \geq X_L y$ (erzwingt, dass $x \geq X_L$ wird, falls $y = 1$ ist; sonst $x \geq 0$)

Beispiel, Fashion GmbH:

Fashion GmbH kann 3 Arten Kleidungsstücke produzieren: Jacken, Röcke, Hosen.

A-Maschinen für Jacken kosten: 1000 GE pro Woche
B-Maschinen für Röcke: 2000 GE pro Woche
C-Maschinen für Hosen: 1500 GE pro Woche (werden angemietet)
Zur Verfügung: 150 Arbeitsstunden und 160 m^2 Material

	Arbeitsstunden pro Stück	Material pro Stück (m^2)	Verkaufspreis	Variable Kosten
Jacken	3	1,2	60	35
Röcke	2	0,8	90	45
Hosen	3	1,3	110	60