6 Korrektheit des Simplexalgorithmus

Folgerung: Es sei L: $Ax = b$, $c^T x \to \max$ LP und
A_B nicht-degenerierte PZB von L und es gebe $\bar{c}_r := c_r - c_B A_B^{-1} A_r > 0$

a) Falls $\bar{a}_r := A_B^{-1} a_r \leq 0$, dann L unbeschränkt
b) Falls es eine positive Komponente in $\bar{a}_r$ gibt, dann ist $A_{B(r)}$ derart, dass $c_{B(r)}\, x_{B(r)} > c_B x_B$.

a) $\underbrace{x_B = A_B^{-1} b - (\underbrace{A_B^{-1} a_r}_{\leq 0})\lambda}$, $x_r = \lambda$, $x_j = 0$ für alle $j \in N \setminus \{r\}$

ist zulässig für alle $\lambda > 0$
mit $c_B^T x_B + \underbrace{\bar{c}_r}_{>0} x_r = c_B^T A_B^{-1} b + \bar{c}_r \lambda$

b) $c_{B(r)}\, x_{B(r)} = c_B^T (A_B^{-1} b) + \underbrace{\bar{c}_r}_{>0} \underbrace{\lambda}_{>0} > c_B^T (A_B^{-1} b) = c_B x_B$.

6 Korrektheit des Simplexalgorithmus

Laufzeit:

- in der bisherigen Version können Endlosschleifen auftreten.

  Anti-Cycling-Regel:
  1) Schreibe alle Variablen in eine Liste L := $(l_1,..,l_{m+n}) = (x_1,..,x_n,t_1,..,t_m)$
  2) Auswahl des Pivotelements:
     2a) Auswahl der Spalte r
         Wähle $r \in \{1,...,n\}$ mit $c_r > 0$. Gibt es mehr als eine Möglichkeit für r, wähle r so, dass die zur Spalte r gehörende NBV möglichst weit vorn in L liegt.
     2b) Auswahl der Zeile s:
         Wähle $s \in \{1,...,m\}$ mit $= \min_{1 \leq i \leq m} \{b_i/a_{ir} \mid a_{ir} > 0\} =: b_s/a_{sr}$

         Gibt es mahr als eine Möglichkeit für s, wähle s so, dass die zur Zeile s gehörige BV möglichst weit vorn in L steht.

- damit: keine Endlosschleifen mehr
- im schlimmsten Fall $O(2^m)$ Pivotschritte (kostruierte Eingaben)
- in Praxis: polynomielles Verhalten

6 Korrektheit des Simplexalgorithmus

Laufzeit:

- in der Praxis ist der Simplex mit Anti-Cycling oft spürbar langsamer als ohne.

- deshalb: um Kreisen z uverhindern muss man die Anticycling-Regel nicht in jedem Schritt anwenden. Stattdessen nur, wenn man eine vorgegebene Anzahl Pivotschritte durchgeführt hat, ohne die Ecke zu verlassen.

- Alternative Anti-Cycling-Regel:
  Wähle von möglichen Zeilen/Spalten-Kandidaten einen zufälligen aus.
  Dann wird Ecke mit Wahrscheinlichkeit 1 verlassen.

  -> hat keine Fans

7 Das duale Problem

Def 5.1. Es sei

$$
\begin{array}{ll}
(L): & c^T x \to \max \\
\text{udN} & Ax \leq b \\
 & x \geq 0
\end{array}
$$

ein LP in kanonischer Form. L heißt primales Problem

Das LP

$$
\begin{array}{ll}
(D): & b^T u \to \min \\
\text{udN} & A^T u \geq c, \\
 & u \geq 0
\end{array}
\longrightarrow \quad u^T A = (A^T u)^T
$$

heißt das zu L duale LP (D = dual(L)).

Bsp:

$$
\begin{array}{l}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq b_2 \\
a_{31} x_1 + a_{32} x_2 \leq b_3 \\
\quad \text{IV} \qquad\quad \text{IV} \\
c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{l}
u_1 a_{11} + u_2 a_{21} + u_3 a_{31} \geq c_1 \\
u_1 a_{12} + u_2 a_{22} + u_3 a_{32} \geq c_2 \\
\\
u_1 b_1 + u_2 b_2 + u_3 b_3 \to \min
\end{array}
$$

7 Das duale Problem

Lemma 5.1. Es sei (L): $Ax \leq b,\ c^T x \to \max$ ein LP. Dann ist

$$\mathrm{dual}(\mathrm{dual}(L)) = L$$

Beweis: dual(L): $A^T u \geq c,$
$b^T u \to \min$

äquivalent zu
D‘: $(-A)^T u \leq -c$
$(-b)^T u \to \max$

Dann ist

$$\mathrm{dual}(D'):\ \left.\begin{array}{l} ((-A)^T)^T y \geq -b \\ (-c)^T y \to \min \end{array}\right\} \Leftrightarrow \underbrace{\left\{\begin{array}{l} Ay \leq b \\ c^T y \to \max \end{array}\right.}_{= (L)}$$

7 Das duale Problem

Satz 7.1. „Schwache Dualität“:

Es sei (L): $Ax \leq b$, $c^T x \rightarrow \max$ ein LP. D := dual(L). Seien z_L und z_D die optimalen Zielfunktionswerte für L und D.
Ist beliebiges x zulässig für L und beliebiges u zulässig für D, dann ist

$$c^T x \leq z_L \leq z_D \leq b^T u$$

Erinnerung:

L: $Ax \leq b$, $c^T x \rightarrow \max$
D: $A^T u \geq c$, $b^T u \rightarrow \min$

Bew: (a) Wegen $x \geq 0$ und $u^T A \geq c^T$ ist

$$c^T x \leq u^T A x$$

(b) Wegen $u \geq 0$ und $Ax \leq b$ ist

$$u^T A x \leq u^T b = b^T u,$$

weil $u, b \in \mathbb{R}^m$.

Es ist also $c^T x \leq b^T u$ für alle x und u (jeweils zulässig)
Insbesondere ist damit auch $z_L \leq b^T u$ für alle zulässigen u und damit auch $z_L \leq z_D$

□

Folgerungen:

(a) Wenn x primal zulässige Lösung ist, und y dual zulässige Lösung,
und $c^T x = b^T u$
dann sind x und u optimale Lösungen.

(kleiner kann $b^T u$ wegen Satz 7.1 nicht werden, und $c^T x$ auch nicht größer.)

(b) Es sei (L) ein LP, D = dual(L).
Ist L unbeschränkt, so hat D keine Lösung.

(Wegen Satz 7.1 ist $z_D \geq \alpha$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.)

Erinnerung:
L: $Ax \leq b,\ c^T x \to \max$
D: $A^T u \geq c,\ b^T u \to \min$

Satz 7.2. „Starke Dualität":
Wenn das primale oder das duale Problem eine optimale Lösung mit endlichem Wert besitzt, dann besitzt auch das Gegenstück eine optimale Lösung und $\max c^T x = \min b^T u$.

Bew: Gezeigt wird: Wenn das primale Problem eine optimale Lösung x besitzt, dann gibt es eine dual zulässige Lösung u, so dass $c^T x = b^T u$.

Sei x eine optimale primal zulässige Basislösung, generiert vom Simplexalgorithmus. Also: $Ax = (A_B, A_N) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \leq b$ mit $x_B = A_B^{-1} b$, $x_N = 0$.

Sei $u := (A_B^{-1})^T \cdot c_B$.

Reduzierte Kosten: $c_N^T - c_B^T \cdot A_B^{-1} A_N$

Dann: $c - A^T u = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_B^T \\ A_N^T \end{pmatrix} \cdot (A_B^{-1})^T \cdot c_B = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ c_N - A_N^T (A_B^{-1})^T c_B \end{pmatrix}}_{= c_N - (c_B^T \cdot A_B^{-1} A_N)^T} \leq 0$

und $c^T x = c_B^T (A_B^{-1} b) = (c_B^T A_B^{-1})^T b = u^T b$ □

7 Das duale Problem

dual / primal	endliches Optimum	unbegrenzt	keine Lösung
endliches Optimum	+	-	-
unbegrenzt	-	-	+
keine Lösung	-	+	+

7 Das duale Problem

Beispiel für: primales und duales Problem haben beide keine Lösung:

Maximiere $3x_1 + 2x_2$

u.d.N.: $2x_1 - 2x_2 \leq -1$

$-2x_1 + 2x_2 \leq -4$

$x_1, x_2 \geq 0$

Minimiere $-w_1 - 4w_2$

u.d.N. $2w_1 - 2w_2 \geq 3$

$-2w_1 + 2w_2 \geq 2$

$w_1, w_2 \geq 0$

Vorbereitung:

geg. L: $Ax \le b,\ x \ge 0,\ c^T x \to \max$,
mit Schlupfvariablen $t_1,\dots,t_m$, $t_i \in \mathbb{R}_{\ge 0}$

L: $Ax \le b$, $x \ge 0$, $c^T x \to \max$ bzw. $Ax - b = -t$, $x \ge 0,\ t \ge 0$, $c^T x \to \max$

primal zulässig, wenn $b \ge 0$

MAX	x_1 .... x_n	-1	
	a_{11} .... a_{1n}	b_1	$= -t_1$
	. . .	.	.
	a_{m1} .... a_{mn}	b_m	$= -t_m$
	c_1 .... c_n	z	

D: $A^T u \ge c$, $u \ge 0$, $b^T u \to \min$ bzw. $A^T u - c = s$, $u \ge 0,\ s \ge 0$, $-b^T u \to \max$

dual zulässig, wenn $c \le 0$

MAX	x_1 .... x_n	-1	
u_1	a_{11} .... a_{1n}	b_1	$= -t_1$
.	. . .	.	.
u_m	a_{m1} .... a_{mn}	b_m	$= -t_m$
-1	c_1 .... c_n	z	
	= .... =		
	s_1 .... s_n		

Überschussvariablen

7 Das duale Problem, dualer Simplex-Algorithmus

Dualer Simplex-Algorithmus für dual zulässige Tableaus:

Ein Tableau heißt dual zulässig, wenn $c \leq 0$.

1) if ($b \geq 0$) opt. Lösung gefunden mit Gewinn z : Stop.

2) Wähle $s \in \{1, ..., m\}$ mit $b_s < 0$

3) if ($A_{s*} \geq 0$) System ist unzulässig: Stop.

4) Wähle $r \in \{1, ..., n\}$ so dass $c_s/a_{sr} = \min_{1 \leq j \leq n} \{ c_j/a_{sj} \mid a_{sj} < 0\}$

5) Pivotschritt mit a_{sr}

6) Gehe nach 1)

7 Das duale Problem, Beispiel

L: Max $-4x_1 - 2x_2$

udN. $-x_1 - 2x_2 \leq -2$

$-x_1 + x_2 \leq -1$

MAX	x_1	x_2	x_3	x_4	
	-1	-2	1	0	$-2 = -x_3$
	-1	1	0	1	$-1 = -x_4$
	-4	-2	0	0	0

MAX	x_1	x_2	x_3	x_4	
	1/2	1	-1/2	0	$1 = -x_2$
	-3/2	0	1/2	1	$-2 = -x_4$
	-3	0	-1	0	2

MAX	x_1	x_2	x_3	x_4	
	1	1	-1/3	-1/3	$1/3 = -x_2$
	1	0	-1/3	-2/3	$4/3 = -x_1$
	0	0	-2	-2	6

D: Min $-2u_1 - u_2$

Max $2u_1 + u_2$

udN. $u_1 + u_2 \leq 4$

$2u_1 - u_2 \leq 2$

MAX	u_1	u_2	u_3	u_4	
	1	1	1	0	$4 = -u_3$
	2	-1	0	1	$2 = -u_4$
	2	1	0	0	0

MAX	u_1	u_2	u_3	u_4	
	0	3/2	1	-1/2	$3 = -u_3$
	1	-1/2	0	1/2	$1 = -u_1$
	0	2	0	-1	-2

MAX	u_1	u_2	u_3	u_4	
	0	1	2/3	-1/3	$2 = -u_2$
	1	0	1/3	1/3	$2 = -u_1$
	0	0	-4/3	-1/3	-6