



Optimierung I

Dr. Ulf Lorenz
F2.413
flulo@upb.de

Organisation

Dozent:

Dr. Ulf Lorenz
F2.413
Fürstenallee 11

Vorlesungen: Mi 9-11 in F0.530

Übungen: Mi 11-13 in F2.211, 14-tägig

Abgabe der Ü-Zettel: Mi 11.00 in VL oder
in „Kasten“ (Umschlag), Tür F2.413

email: flulo@upb.de

WWW: <http://www.upb.de/cs/flulo>

(hier auch aktuelle Infos + Ü-Zettel)

Bachelor-Modul II.2.1, MUA, 3 Leistungspunkte

Vorkenntnisse: Mathe I für Informatiker oder Lineare Algebra I

Leistungsnachweis: Klausur oder mündliche Prüfung (je nach Andrang)



Organisation

Literatur:

- Nemhauser/Wolsey: Integer and Combinatorial Optimization
- Papdimitriou/Steiglitz: Combinatorial Optimization
- Kolman/Beck: Elementary Linear Programming with Applications
- Neumann/Morlock: Operations Research

Inhalte:

- Simplex-Algorithmus
- Dualitätstheorie
- ganzzahlige lineare Optimierung

Einführung

Beispiel 1, Urlaubsfahrt planen:

gegeben: eine Landkarte + Start + Ziel +

„Wohlfühlfunktion“, Gütekriterium, **Zielfunktion**

gesucht : Entscheidung für eine der möglichen Routen,
abhängig von der Wohlfühlfunktion

- möglichst schnell?
- möglichst wenig Energie verbrauchen?
- schönen Weg wählen?



Einführung

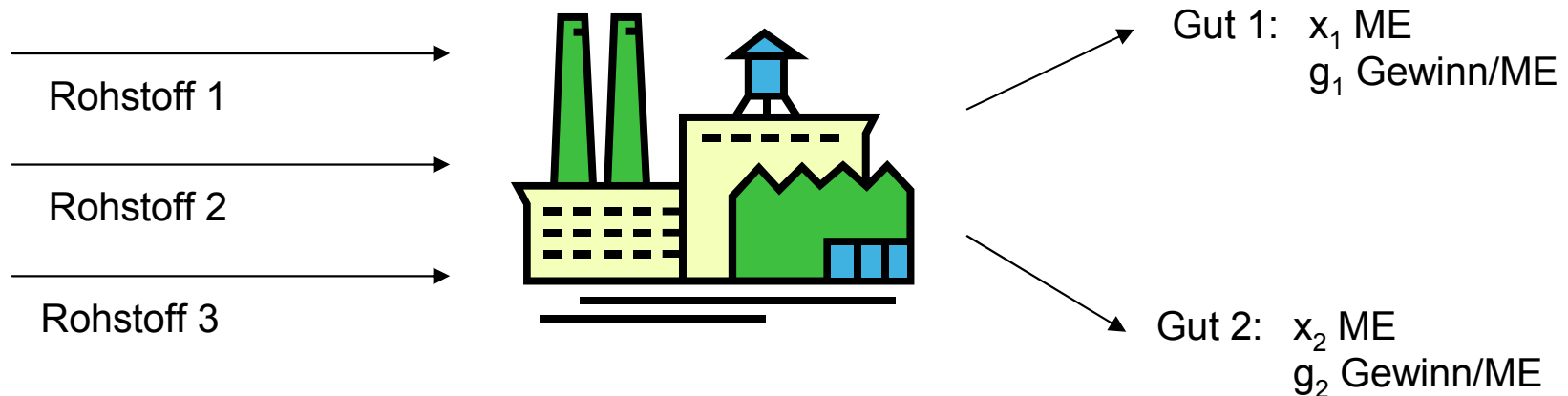
Beispiel 2, Produktion planen:

gegeben: eine Produktionsanlage, zwei mögliche Güter (Gut 1 und Gut 2)

Bedingungen: (**Nebenbedingungen, Beschränkungen, Restriktionen**)

- Zielfunktion: maximiere Gewinn; Gewinne g_j pro ME von Gut $j = 1, 2$ bekannt.
- Güter konkurrieren um Rohstoffe
- verfügbare Menge Rohstoff i : $b_i, j = 1, 2, 3$
- benötigte Menge Rohstoff i für Produktion einer ME von Gut j gegeben durch Matrix a_{ij} ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2$)

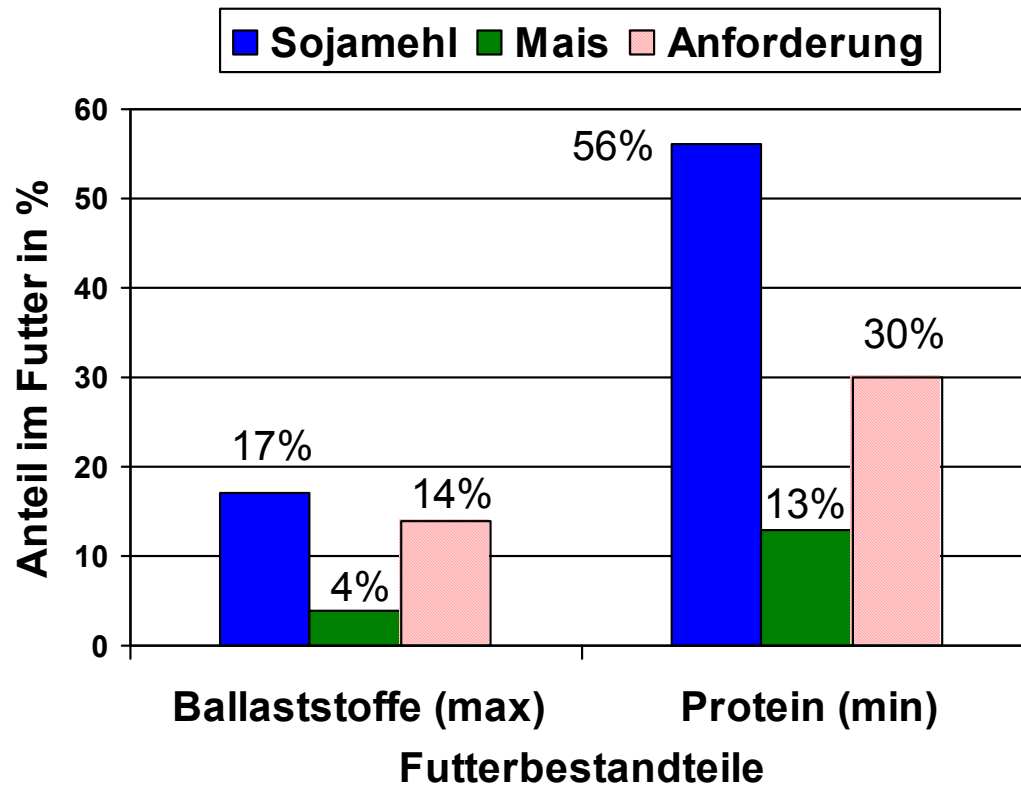
gesucht : optimaler Produktionsplan. Hier: Entscheide, wieviel Gut 1 und wieviel Gut 2 produziert werden soll;



Einführung

Beispiel 3: Futtermischung

gegeben:



Futter	€ / kg
Sojamehl	0,90
Mais	0,30

Mindestmenge Futter / Tag
800 kg

gesucht: Mischung, die die **Nebenbedingungen** erfüllt und **minimale Kosten** verursacht.

Einführung

Formulierung mit Hilfe von Ungleichungen

⇒ ein sogenannte **Lineare Optimierungsmodell**

$$\begin{array}{llllll} \min & 0,9 & x_s & + & 0,3 & x_m & & (z) \\ \text{so dass} & & x_s & + & & x_m & \geq & 800 & (a) \\ & 0,17 & x_s & + & 0,04 & x_m & \leq & 0,14(x_s + x_m) & (b) \\ & 0,56 & x_s & + & 0,13 & x_m & \geq & 0,30(x_s + x_m) & (c) \\ & & x_s, & & x_m & \geq & 0 & & \end{array}$$

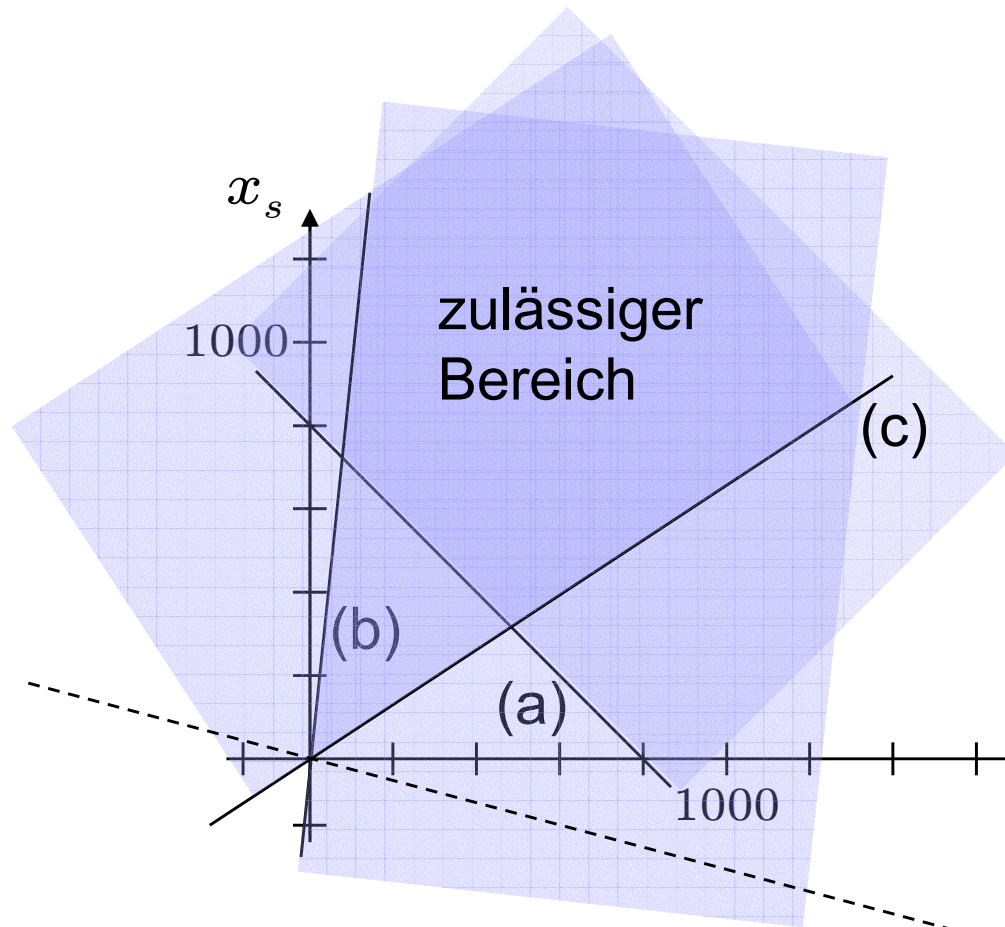
wobei: x_s – Menge an Sojamehl in kg
 x_m – Menge an Mais in kg

x_s und x_m heißen **Entscheidungsvariablen**
(a), (b), (c) **Nebenbedingungen**
(z) **Zielfunktion**

Einführung

$0,17$	$x_s +$	$x_m \geq$	800	(a)
$0,56$	$x_s + 0,04$	$x_m \leq$	$0,14(x_s + x_m)$	(b)
\min	$x_s + 0,13$	$x_m \geq$	$0,30(x_s + x_m)$	(c)
	$0,9$	$x_s + 0,3$	x_m	

■ Graphische Lösung



(z) bei $(x_s, x_m) = (316, 484)$
 $\Rightarrow 0,9x_s + 0,3x_m = 429,6$

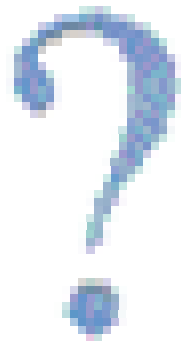
(z) bei $(x_s, x_m) = (0, 0)$
 $\Rightarrow 0,9x_s + 0,3x_m = 0$

Einführung

Was haben all diese Probleme gemeinsam?

- sind alle aus **Komplexitätsklasse P oder NP**
- lassen sich alle als **lineares Programm**, als **lineares Integerprogramm** oder als **gemischt ganzzahliges lineares Programm** formulieren/modellieren.

Programme?



Einführung

Definition 1:

- Problem LP (**Lineares Programm in kanonischer Form**)

gegeben: $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$

gesucht: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ mit

$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ und

$\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ maximal

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

\uparrow \uparrow \uparrow
 \mathbf{A} \mathbf{x} \mathbf{b}

$$\begin{matrix} \mathbf{c} \\ \swarrow \end{matrix} (c_1, c_2) \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 x_1 + c_2 x_2 \rightarrow \max$$

Definition 3:

- Problem MIP (**Mixed Integer Program**)

gegeben: $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times (n_1 + n_2)}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n_1 + n_2}$

gesucht: \mathbf{x} : $\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{n_1} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\mathbf{x}_{n_1+1} \dots \mathbf{x}_{n_1+n_2} \in \mathbb{N}_0$ mit

$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ und

$\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ maximal

Einführung

Umwandlung in kanonische Form.

$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \min$	$-\mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \max$
$A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$	$-A\mathbf{x} \leq -\mathbf{b}$
$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$	$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ $-A\mathbf{x} \leq -\mathbf{b}$
$x_i \in [a, b]$ bzw. $x_i \in \{a, b\}$	$x_i \geq a$ $x_i \leq b$

Einführung

Die Standardform:

- Standardproblem (L_S) der linearen Optimierung

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Max.} & \mathbf{F}(\mathbf{x}) := \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{u.d.N} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{array} \right.$$

Auch hier gilt $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, sowie
 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ für Lineare Programme bzw.
 $\mathbf{x} \in \mathbb{N}_0^n$ für Lineare Integerprogramme

Diese Darstellung ist wichtig, da sie für analytische Betrachtungen rechentechnische Vorteile bietet. Gleichungen lassen sich oftmals besser handhaben, als Ungleichungen.

Einführung

Umwandlung von kanonischer Form in Standardform.

Sei (L_K) ein LP in kanonischer Form: $\max c^T x$ u.d.N. $x \geq 0$ und $Ax \leq b$.
 Durch Einführung so genannter **Schlupfvariablen** lässt sich ein (L_K) in ein (L_S) überführen.

Bsp (Futtermittel):

$$\begin{array}{rcll}
 \max & -0,9 & x_1 & - & 0,3 & x_2 \\
 \text{so dass} & & -x_1 & - & & x_2 & \leq & -800 \\
 & 0,03 & x_1 & - & 0,10 & x_2 & \leq & 0 \\
 & -0,26 & x_1 & + & 0,17 & x_2 & \leq & 0 \\
 & & x_1, & & & x_2 & \geq & 0
 \end{array}$$

n Strukturvariablen

m Schlupfvariablen

$$\begin{array}{rcll}
 \max & -0,9 & x_1 & - & 0,3 & x_2 \\
 \text{so dass} & & -x_1 & - & & x_2 & + & x_3 & = & -800 \\
 & 0,03 & x_1 & - & 0,10 & x_2 & + & x_4 & = & 0 \\
 & -0,26 & x_1 & + & 0,17 & x_2 & + & x_5 & = & 0 \\
 & & x_1, & & & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0
 \end{array}$$

Einführung

Umwandlung von kanonischer Form in Standardform.

Sei (L_K) ein LP in kanonischer Form: $\max c^T x$ u.d.N. $x \geq 0$ und $Ax \leq b$.

Definiere $A := (A, E)$, $\bar{b} := b$, $c := \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$, $\chi := \begin{pmatrix} x \\ x_S \end{pmatrix}$

Dann wird durch $\max c^T \chi$ u.d.N. $\chi \geq 0$ und $A\chi = \bar{b}$ ein Optimierungsproblem in Standardform (L_S) beschrieben.

Sei χ eine Lösung von (L_S) . Dann ist x Lösung von (L_K) mit

$$c^T \chi = (c^T, 0^T) \cdot \begin{pmatrix} x \\ x_S \end{pmatrix} = c^T x + 0^T x_S = c^T x.$$

Andererseits: Sei x Lösung von $Ax \leq b$ und $x_S := \begin{pmatrix} x \\ -Ax+b \end{pmatrix}$

Dann ist χ eine Lösung von (L_S) : $A\chi = (A, E) \cdot \begin{pmatrix} x \\ -Ax+b \end{pmatrix} = Ax - Ax + b = b = \bar{b}$,
offensichtlich ebenfalls mit $c^T \chi = c^T x$.

Satz 1: (L_K) und (L_S) sind „äquivalente“ Darstellungen.

Einführung

Weitere Modelle mit LP/IP, graphbasierte Probleme

Problem Shortest Path:

geg: gerichteter Graph $G = (V, E)$, $s, t \in V$

ges: kürzester Weg von s nach t in G .

Modellierung: Kante $e \rightarrow$ Variable $x_e \in \{0, 1\}$

Minimiere $\sum_{e \in E} x_e$ mit

$$\sum_{e \in (s,v)} x_e = 1, \quad \sum_{e \in (v,t)} x_e = 1$$

$$\sum_{e \in (v,w)} x_e - \sum_{e \in (w,x)} x_e = 0 \text{ für alle } w \in V \setminus \{s, t\}$$

Shortest Path als IP \rightarrow ☹, aber es reicht aus, $x_e \in [0, 1]$ zu fordern. Jede optimale Lösung ist automatisch ganzzahlig (hier ohne Beweis).

Einführung

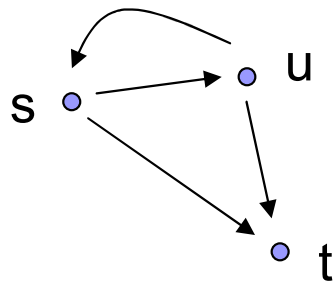
Weitere Modelle mit LP/IP

Problem Shortest Path:

geg: gerichteter Graph $G = (V,E)$, $s,t \in V$

ges: kürzester Weg von s nach t in G .

Beispiel: Darstellung als $Ax = b$



$$x_{(s,u)} + x_{(s,t)} = 1$$

$$x_{(s,t)} + x_{(u,t)} = 1$$

$$x_{(s,u)} - x_{(u,s)} - x_{(u,t)} = 0$$

Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix

$$A = \begin{pmatrix} & \begin{matrix} (u,s) & (u,t) & (s,t) & (s,u) \end{matrix} \\ \begin{matrix} u \\ s \\ t \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{u,s} \\ x_{u,t} \\ x_{s,t} \\ x_{s,u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lsg: $x = (0,1,0,1)^T$ oder $x = (0,0,1,0)^T$

Einführung

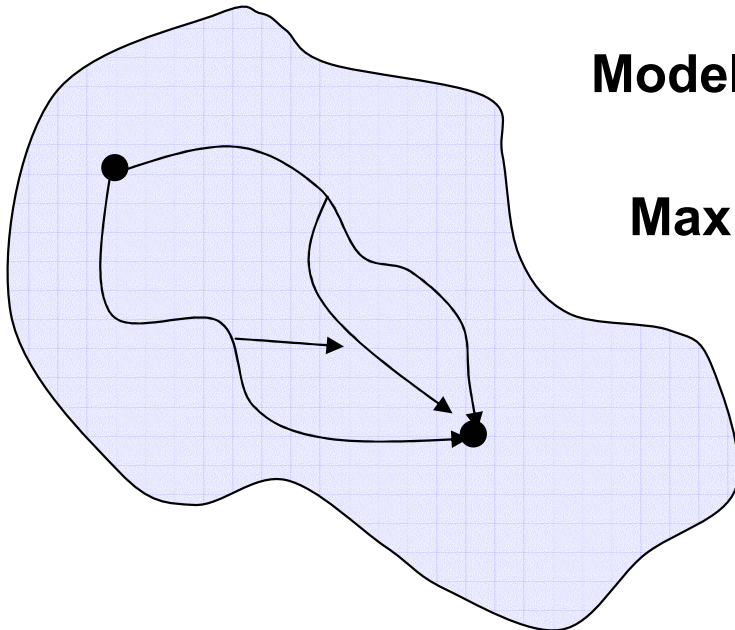
Weitere Modelle mit LP/IP

Problem MaxFlow:

geg: gerichteter Graph $G = (V, E)$, $s, t \in V$ und Kantenkapazitäten $c_e \in \mathbb{N}$, $\forall e \in E$

ges: ein Fluss $f: E \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit $\sum_{e \in (v,w)} f(e) - \sum_{e \in (w,x)} f(e) = 0$ für alle $w \in V \setminus \{s,t\}$ und

$f(e) \leq c_e$ für alle $e \in E$ und $\sum_{e \in (s,v)} f(e) - \sum_{e \in (v,s)} f(e)$ maximal.



Modellierung: Kante $e \rightarrow x_e \in [0, c_e]$, $x_e \triangleq f(e)$

Maximiere $\sum_{e \in (s,v)} f(e) - \sum_{e \in (v,s)} f(e)$ mit

$\sum_{e \in (v,w)} f(e) - \sum_{e \in (w,x)} f(e) = 0$ für alle $w \in V \setminus \{s,t\}$ und

$x_e \leq c_e$ für alle $e \in E$

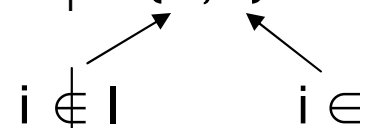
Einführung

Weitere Modelle mit LP/IP

Problem Rucksack:

geg: $\underbrace{a_1, \dots, a_n}_{\text{Nutzen}}; \underbrace{b_1, \dots, b_n}_{\text{Kosten}}; \underbrace{d \in \mathbb{N}_0}_{\text{max. Kosten}}$

ges: $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ so dass $\sum_{x \in I} b_i \leq d$ und $\sum_{x \in I} a_i$ maximal

Modellierung: $i \in \{1, \dots, n\} \rightarrow x_i \in \{0, 1\}$


Maximiere $\sum_{i=1}^n a_i x_i$ mit

$$\sum_{i=1}^n b_i x_i \leq d$$

Optimale Lsg. nicht automatisch ganzzahlig.