Optimierung I

Musterlösung zu Aufgabenblatt Nr. 4

1)

Maximiere $z = 2x_1 + x_2 + 3x_3$
u.d.N. $2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 6$
$x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 10$
$2x_1 + x_3 \leq 7$
$x \geq 0$

Ist eine primal zulässiges LP.

Daraus ergeben sich folgende Tableaus:

Ausgangstableau

MAX	x1	x2	x3	t1	t2	t3	
	2	-1	3	1	0	0	6
	1	3	5	0	1	0	10
	2	0	1	0	0	1	7
	2	1	3	0	0	0	0

1. Iteration

MAX	x1	x2	x3	t1	t2	t3	
	2/3	-1/3	1	1/3	0	0	2
	-7/3	14/3	0	-5/3	1	0	0
	4/3	1/3	0	-1/3	0	1	5
	0	2	0	-1	0	0	-6

2.Iteration

MAX	x1	x2	x3	t1	t2	t3	
	1/2	0	1	3/14	1/14	0	2
	-1/2	1	0	-5/14	3/14	0	0
	3/2	0	0	-3/14	-1/14	1	5
	1	0	0	-4/14	-6/14	0	-6

3.Iteration

MAX	x1	x2	x3	t1	t2	t3	
	0	0	1	4/14	2/21	-1/3	1/3
	0	1	0	-6/14	8/42	1/3	5/3
	1	0	0	-2/14	-1/21	2/3	10/3
	1	0	0	-2/14	-16/42	-2/3	-28/3

Damit ergibt sich eine optimale Lösung für $z = \frac{28}{3}$ mit

$x_1 = \frac{10}{3}$

$x_2 = \frac{5}{3}$

$x_3 = \frac{1}{3}$

Nach der letzten Iteration gilt:

$$A_B = (x_3, x_2, x_1) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$A_B^{-1} = (t_1, t_2, t_3)$ [siehe blau gefärbte Matrix]

2)

$$\begin{aligned}
\text{Minimiere } z &= 8x_1 + 6x_2 + 11x_3 \\
\text{u.d.N.} \quad & 5x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 4 \\
& 5x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 2 \\
& 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 \leq 5 \\
& 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 \geq 3 \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
& x \geq 0
\end{aligned}$$

Um eine dual zulässige Lösung zu erreichen, muss das LP wie folgt modifiziert werden:

$$\begin{aligned}
\text{Maximiere } z &= -8x_1 - 6x_2 - 11x_3 \\
\text{u.d.N.} \quad & 5x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 4 \\
& -5x_1 - x_2 - 3x_3 \leq -2 \\
& 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 \leq 5 \\
& -2x_1 - 4x_2 - 7x_3 \leq -3 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\
& -x_1 - x_2 - x_3 \leq -1
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich folgendes Tableau:

Ausgangstableau

MAX	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	
	5	1	3	1	0	0	0	0	0	4
	-5	-1	-3	0	1	0	0	0	0	-2
	2	4	7	0	0	1	0	0	0	5
	-2	-4	-7	0	0	0	1	0	0	-3
	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1
	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	1	-1
	-8	-6	-11	0	0	0	0	0	0	0

1. Iteration

MAX	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	
	9/2	0	5/4	1	0	0	1/4	0	0	13/4
	-9/2	0	-5/4	0	1	0	-1/4	0	0	-5/4
	0	0	0	0	0	1	1	0	0	2
	1/2	1	7/4	0	0	0	-1/4	0	0	3/4
	1/2	0	-3/4	0	0	0	1/4	1	0	1/4
	-1/2	0	-3/4	0	0	0	-1/4	0	1	-1/4
	-5	0	-1/2	0	0	0	-3/2	0	0	9/2

2. Iteration

MAX	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	
	0	0	0	1	1	0	0	0	0	2
	18/5	0	1	0	-4/5	0	1/5	0	0	1
	0	0	0	0	0	1	1	0	0	2
	-29/5	1	0	0	7/5	0	-3/5	0	0	-1
	16/5	0	0	0	-3/5	0	2/5	1	0	1
	-16/5	0	0	0	3/5	0	-2/5	0	1	-1
	-16/5	0	0	0	-2/5	0	-7/5	0	0	5

3. Iteration

MAX	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	
	0	0	0	1	1	0	0	0	0	2
	0	18/29	1	0	2/29	0	-5/29	0	0	11/29
	0	0	0	0	0	1	1	0	0	2
	1	-5/29	0	0	-7/29	0	3/29	0	0	5/29
	0	16/29	0	0	5/29	0	2/29	1	0	13/29
	0	-16/29	0	0	-5/29	0	-2/29	0	1	-13/29
	0	-16/29	0	0	-34/29	0	-31/29	0	0	161/29

4. Iteration

MAX	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	
	0	0	0	1	1	0	0	0	0	2
	0	0	1	0	-1/8	0	-1/4	0	0	-1/8
	0	0	0	0	0	1	1	0	0	2
	1	0	0	0	-3/16	0	1/8	0	-5/16	5/16
	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
	0	1	0	0	5/16	0	1/8	0	-29/16	13/16
	0	0	0	0	-1	0	-1	0	-1	6

5. Iteration

MAX	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	
	0	0	0	1	1	0	0	0	0	2
	0	0	-4	0	1/2	0	1	0	-9/2	1/2
	0	0	4	0	-1/2	1	0	0	9/2	3/2
	1	0	1/2	0	-1/4	0	0	0	1/4	1/4
	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
	0	1	1/2	0	1/4	0	0	0	- 5/4	3/4
	0	0	-4	0	-1/2	0	0	0	-11/2	13/2

Damit ergibt sich eine optimale Lösung für $z = \frac{13}{2}$ mit

$x_1 = \frac{1}{4}$

$x_2 = \frac{3}{4}$

$x_3 = 0$

Nach der letzten Iteration gilt:

$$A_B = (t_1, t_4, t_3, x_1, t_5, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_B^{-1} = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) \ \text{[siehe blau gefärbte Matrix]}$$