Optimierung I
Musterlösung zu Übungsblatt 2

erstellt von Daniel Warneke, Sebastian Porombka,
Arne Schwabe und Matthias Grawinkel

30. April 2006

Aufgabe 1

a)

Sei x_{ij} die Anzahl Einheiten vom Produkt P_j mit $1 \leq j \leq n$, die auf der Maschine M_i (mit $1 \leq i \leq m$) hergestellt werden. Da die Aufgabe keine Angaben darüber macht, ob es sich bei den Einheiten zwangsläufig um eine ganzzahlige Größe handeln muss oder ob auch reelle Zahlen als Einheiten zulässig sind, steht es uns frei zu entscheiden, ob wir die Optimierungsaufgabe als LP oder als IP formulieren.
Wir gehen im Folgenden davon aus, dass die Einheiten ganzzahlig sein müssen, d.h. $x_{ij} \in \mathbb{N}_0$.

Zielfunktion

Sofern alle Nebenbedingungen erfüllt sind, ist der Gewinn pro Einheit des Produkts j durch c_j gegeben. Die Zielfunktion des Optimierungsproblems lautet demnach:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_j x_{ij} \longrightarrow max$$

Nebenbedingungen

Damit der Gewinn von c_j erreicht wird, müssen vom Produkt j mindestens b_j Einheiten hergestellt werden:

$$\sum_{i=1}^{m} -x_{ij} \leq -b_j \text{ für } 1 \leq j \leq n$$

Die Maschine i darf nicht länger als k_i Minuten produzieren:

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \leq k_i$ für $1 \leq i \leq m$

b)

Durch die gegebenen Daten ergeben sich folgende Gleichungen. Die Zielfunktion lautet in diesem konkreten Fall:

$200 * (x_{1,1} + x_{2,1}) + 190 * (x_{1,2} + x_{2,2}) \longrightarrow max$

Die Nebenbedingungen führen zu diesen Gleichungen:

$-x_{1,1} - x_{2,1} \leq -80$
$-x_{2,1} - x_{2,2} \leq -100$
$12x_{1,1} + 10x_{1,2} \leq (16 * 60)$
$10x_{2,1} + 9x_{2,2} \leq (15 * 60)$

Eine zulässige Lösung wäre demnach $x_{1,1} = 80, x_{1,2} = 0, x_{2,1} = 0, x_{2,2} = 100$.

c)

Die im Abschnitt b) angegebene Lösung ist nicht optimal.
Sie liefert einen Gewinn von 35000 Euro, es existiert aber eine Lösung mit $x_{1,1} = 0, x_{1,2} = 95, x_{2,1} = 85, x_{2,2} = 5$, mit der ein Gewinn von 36000 Euro erreicht wird.

Aufgabe 2

a)

Lösungsidee

Wir zeigen, dass die Menge $M = \{y \in \mathbb{R}^3; 0 \leq y \leq x\}$ mit $x \in \mathbb{R}^3$ konvex ist, indem wir sie als Schnitt von sechs Halbräumen darstellen. Da der Schnitt konvexer Mengen wieder konvex ist, muss demnach auch M konvex sein.

Lösung

Die Menge ist in jeder Dimension $i \in \{1, 2, 3\}$ durch die zwei folgenden Halbräume begrenzt:

$\{y_i \in \mathbb{R} | y_i \geq 0\}$ und $\{y_i \in \mathbb{R} | y_i \leq x_i\}$

Die Menge $\{y_i \in \mathbb{R} | y_i \geq 0\} \cap \{y_i \in \mathbb{R} | y_i \leq x_i\}$ mit $i \in \{1, 2, 3\}$ ist konvex, da jeder Punkt y_{i0} mit $0 \leq y_{i0} \leq x_i$ ebenfalls in dieser Menge liegt.

Bildet man nun den Schnitt dieser drei Mengen , so erhält man die Menge M:

$M = \bigcap_{i=1}^{3}(\{y_i \in \mathbb{R} | y_i \geq 0\} \cap \{y_i \in \mathbb{R} | y_i \leq x_i\})$

Damit muss M konvex sein.

b)

Lösungsidee

Ein Punkt $y_0 \in M$ ist eine Ecke von M, g.d.w. für $z \in \mathbb{R}^3$ mit $y_0 + z \in M$ und $y_0 - z \in M$ folgt, dass z der Nullvektor ist.

Lösung

Sei $E = \{y \in \mathbb{R}^3 | \forall i \in \{1, 2, 3\} : y_i \in \{0, x_i\}\}$ die Menge der Ecken von M.
Wir behaupten nun, dass $|E| = 8$ und wollen dies im folgenden beweisen.

Zunächst zeigen wir, dass E mindestens acht Elemente enthält. Dazu benutzen wir die in der Lösungsidee beschriebene Eigenschaft einer Ecke.
Da jeder Eckpunkt y an der Stelle i entweder den Wert 0 oder x_i hat, genügt es folgende vier relevanten Fälle zu betrachten, um zu zeigen, dass die Punkte
$(0, 0, 0), (0, 0, x_i), (0, x_i, 0), (0, x_i, x_i), (x_i, 0, 0), (x_i, 0, x_i), (x_i, x_i, 0), (x_i, x_i, x_i)$
Ecken in M sind:

$y_i = 0, z_i \geq 0 : y - z \in M \Rightarrow y_i - z_i \geq 0 \Rightarrow z_i = 0$
$y_i = 0, z_i \leq 0 : y + z \in M \Rightarrow y_i + z_i \geq 0 \Rightarrow z_i = 0$
$y_i = x_i, z_i \geq 0 : y + z \in M \Rightarrow y_i + z_i \leq 0 \Rightarrow z_i = 0$
$y_i = x_i, z_i \leq 0 : y - z \in M \Rightarrow y_i - z_i \leq 0 \Rightarrow z_i = 0$

Nun wollen wir zeigen, dass es außer den acht herausgestellten Punkten keine weiteren Elemente in E geben kann.
Wir zeigen, dass für jeden Punkt $y \in M$, der nicht in E liegt, ein Vektor z ungleich dem Nullvektor gefunden werden kann, so dass sowohl $y + z \in M$ als auch $y - z \in M$ gilt. Damit kann y kein Eckpunkt sein.

Sei $y \in M$ mit $0 < y_j < x_j$ für ein $j \in \{1, 2, 3\}$. Damit liegt y nicht in E. Wir konstruieren nun ein $\epsilon = \frac{1}{2} * min(y_j, x_j - y_j)$ (immer > 0) und einen Vektor $z = \epsilon * e_j$ (e_j ist der j-te Einheitsvektor). Damit gilt für j nach der Definition von Epsilon $0 \leq (y \pm z)_j \leq x_j$ und für alle $i \neq j$: $y_i = (y \pm z)_i$. Damit liegt sowohl $y + z$ wie auch $y - z$ in M, obwohl z ungleich dem Nullvektor ist.
Damit kann y kein Element von E sein.

Aufgabe 3

Für jede Komponente i von Ax mit $1 \leq i \leq m$:

$(Ax)_i =$
$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} * x_j =$
$\sum_{j \in B(\mathbb{N}_m)} a_{ij} * x_j + \sum_{j \in N(\mathbb{N}_{n-m})} a_{ij} * x_j =$
$\sum_{j=1}^{m} a_{iB(j)} x_{B(j)} + \sum_{j=1}^{n-m} a_{iN(j)} x_{N(j)} =$
$(A_B x_B)_i + (A_N x_N) i =$
$(A_N x_N)_i$

Bei der folgenden Umformung ist zu beachten, dass die Ergebnismatrix nicht die Größe $k \times n$ hat, sondern lediglich $k \times m$, da die Funktion B nur auf $\mathbb{N}_m$ definiert ist.

Für jede Komponente $1 \leq i \leq k$ und $1 \leq j \leq m$:
$((DA)_B)_{i,j} =$
$(DA)_{iB(j)} =$
$\sum_{l=1}^{m} d_{il} a_{lB(j)} =$
$\sum_{l=1}^{m} d_{il} (A_B)_{lj} =$
$(DA_B)_{ij}$