Übungen zu Optimierung I
Musterlösung zu Blatt 1

Aufgabe 1:

Worte: ADV, CIR, FAR, HOI, JOE, MOL, OSF, ROE, TVA, YES

A: 1	L: 12
C: 3	M: 13
D: 4	O: 15
E: 5	R: 18
F: 6	S: 19
H: 8	T: 20
I: 9	V: 22
J: 10	Y: 25

$$A = \begin{pmatrix} A & C & F & H & J & M & O & R & T & Y \\ D & I & A & O & O & O & S & O & V & E \\ V & R & R & I & E & L & F & E & A & S \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 8 & 10 & 13 & 15 & 18 & 20 & 25 \\ 4 & 9 & 1 & 15 & 15 & 15 & 19 & 15 & 22 & 5 \\ 22 & 18 & 18 & 9 & 5 & 12 & 6 & 5 & 1 & 19 \end{pmatrix}$$

$$A_{ij} = \textit{Wert des } i-\textit{ten Buchstaben des Wortes } j$$

$$1 \le i \le 3 \quad 1 \le j \le 10$$

$$X_j = \begin{cases} 0 & \textit{wenn das } j-\textit{te Wort nicht gewählt wird} \\ 1 & \textit{wenn das } j-\textit{te Wort gewählt wird} \end{cases}$$

$$\textit{Ziel}: \quad \max \sum_{j=1}^{10} \left(X_j \cdot \sum_{i=1}^{3} A_{ij} \right)$$

$$\textit{so dass} \quad \sum_{j=1}^{10} X_j = 4$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_j \cdot \left(A_{1j} - A_{2j}\right) \le 0$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_j \cdot \left(A_{1j} - A_{3j}\right) \le 0$$

Aufgabe 2:

$$X_{ab} = \begin{cases} 1 & \textit{wenn Job } J_a \textit{ auf Maschine } M_b \textit{ ausgeführt wird} \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

$$\textit{Ziel}: \quad \min \sum_{a=1}^{n} X_{a1} \cdot p_a$$

$$\textit{so dass}: \quad \sum_{b=1}^{m} X_{ab} = 1 \quad \forall a \in \{1,2,..,n\}$$

$$\sum_{a=1}^{n} X_{ai} \cdot p_a - \sum_{a=1}^{n} X_{a1} \cdot p_a \leq 0 \quad \forall i \in \{2,3,..,m\}$$

Aufgabe 3:

Es wird angenommen, dass für alle LP-Systeme jeweils x,y ≥ 0 gilt.

a)
Bringe Zielfunktion und Restriktionen in Normalform:

$$z: 4x+3y \quad \Rightarrow \quad y=-\tfrac{4}{3}x+\sigma$$

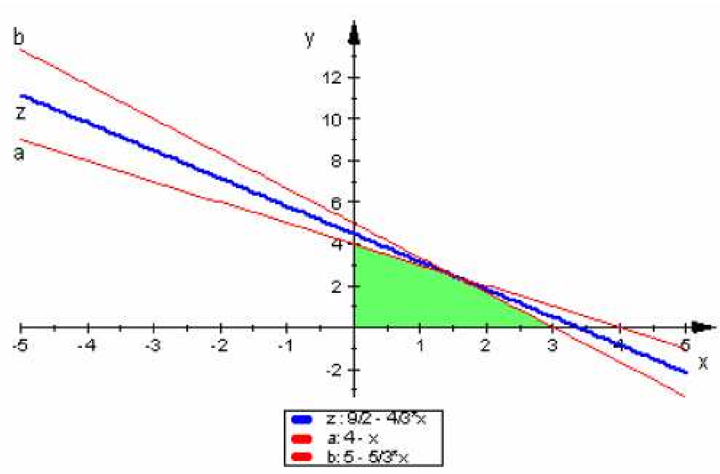
$$a: x+y \le 4 \quad \Rightarrow \quad y \le -x+4$$

$$b: 5x+3y \le 15 \quad \Rightarrow \quad y \le -\tfrac{5}{3}x+5$$

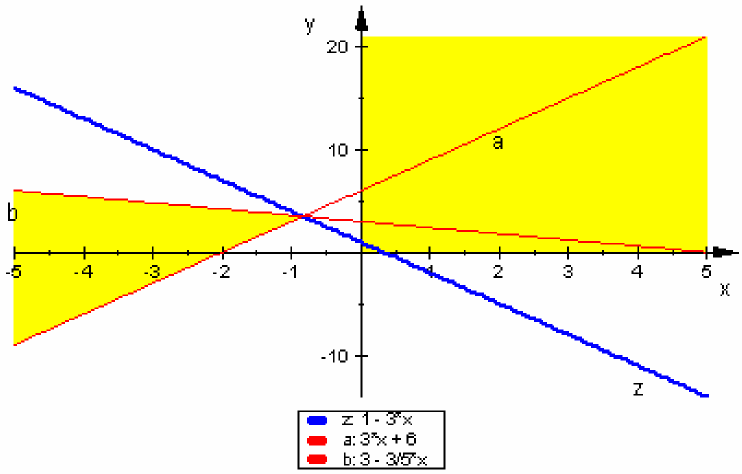
σ bezeichnet dabei die Verschiebung der Zielfunktion z, sodass das Optimum auf z liegt. Der Schnittpunkt der beiden Restriktionsgeraden a und b stellt offensichtlich die Ecke des Lösungsraums mit der optimalen Lösung dar. Bestimme σ:
Der Schnittpunkt von a und b liegt bei p = (p_x, p_y) wobei

$$0=(a-b)=(-x+4+\tfrac{5}{3}x-5)=\tfrac{2}{3}x-1 \quad \Rightarrow \quad x=\tfrac{3}{2}=p_x \text{ und } a(p_x)=\tfrac{5}{2}=p_y$$

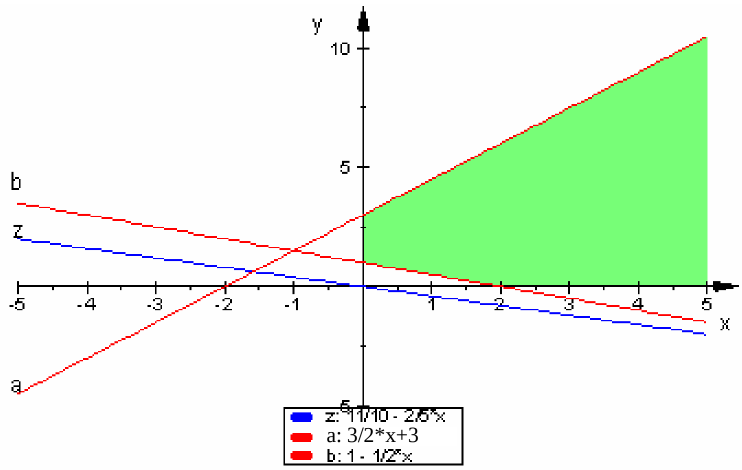
p eingesetzt in z ergibt $\frac{5}{2}=-\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}+\sigma \quad \Rightarrow \quad \sigma=\frac{9}{2}$ und damit für z: $y=-\frac{4}{3}x+\frac{9}{2}$



b)
Die Geraden werden analog zu a) ermittelt, genauso der Abstand σ für die Verschiebung der Zielfunktion.
Der einzig zulässige Lösungsraum zwischen a und b liegt jedoch im zweiten bzw. dritten Quadranten und enthält folglich nur negative Lösungen. Da wir von der Restriktion ausgehen, dass x und y positiv sein müssen, enthält dieses LP-System keine Lösung und damit auch keine optimale Lösung.
Ansonsten läge die Zielfunktion im Optimum mit z: $y = 1\text{-}3x$, lässt man $x, y \leq 0$ zu.



c)
Es gibt keine optimale Lösung, da der Lösungsraum unbeschränkt ist und z für $\sigma \to \infty$ stets den Lösungsraum durchläuft.



d)
Zunächst fällt auf, dass z und b parallel verlaufen. Gerade c beeinflusst den Lösungsraum nicht, z kann verschoben werden, bis b und z sich decken, was für σ = 6 der Fall ist.
Das LP-System enthält keine optimale Lösung (optimale Ecke), sondern entlang dem Geradenabschnitt von b zwischen dessen Schnittpunkten mit a bzw. der Abszisse beliebig viele optimale Lösungen.