Einige entscheidbare bzw. rekursiv aufzählbare Sprachen

Entscheidbare Sprachen

Gödel $:= \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ ist Gödelnummer einer DTM M}

States $:= \{< M >, d \mid M$ besitzt mindestens *d* Zustände}

Einige entscheidbare bzw. rekursiv aufzählbare Sprachen

Rekursiv aufzählbare Sprachen

Akzeptanzproblem: $A = \{< M > x \mid M \text{ akzeptiert } x\}$

Halteproblem: $H = \{< M > x \mid M \text{ gestartet mit } x \text{ hält } \}$

Useful: $:= \{< M > q \mid q \text{ ist Zustand von } M, \text{ es gibt Eingabe}$

$\text{x, so dass M gestartet mit x Zustand q erreicht}\}$

„Nicht-Leer“ $:= \{< M >\mid L(M) \neq \emptyset\}$

- keine dieser Sprachen ist entscheidbar ! -

Eine nicht rekursiv aufzählbare Sprache

HEINZ NIXDORF INSTITUT
Universität Paderborn
Algorithmen und Komplexität

Wir fassen Gödelnummern als Zahlen auf.
Sei M^{reject} die *DTM*, die jede Eingabe sofort ablehnt.

$$M_i = \begin{cases} M^{reject}, & \text{falls } i \text{ keine Gödelnummer ist} \\ M, & \text{falls } bin(i) =< M > \end{cases}$$

Satz: Diag $:= \{bin(i), M_i \text{ akzeptiert } bin(i) \text{ nicht }\}$

ist nicht rekursiv aufzählbar.

$\longrightarrow$ Diagonalisierung

Abschlusseigenschaften für entscheidbare Sprachen:

Satz: Seien L_1, L_2 entscheidbar.

(i) $\bar{L}_1$ ist entscheidbar.
(ii) $L_1 \cap L_2$ ist entscheidbar.
(iii) $L_1 \cup L_2$ ist entscheidbar.

„Die Klasse der entscheidbaren Sprachen ist abgeschlossen gegenüber Komplement, Durchschnitt und Vereinigung“

HEINZ NIXDORF INSTITUT
Universität Paderborn
Algorithmen und Komplexität

Abschlusseigenschaften für rekursiv aufzählbare Sprachen:

Satz: Seien L_1 und L_2 rekursiv aufzählbar.

(i) $L_1 \cup L_2$ ist rekursiv aufzählbar

(ii) $L_1 \cap L_2$ ist rekursiv aufzählbar

!! Die Klasse der rekursiv aufzählbaren Sprachen ist nicht abgeschlossen gegenüber Komplement !!

Bew: Diag ist nicht rekursiv aufzählbar,
aber das Komplement von Diag ist rekursiv aufzählbar.

Satz: L ist entscheidbar genau dann, wenn

L und $\bar{L}$ rekursiv aufzählbar sind.

Weitere unentscheidbare Probleme: Reduktionen

Def: $L' \subseteq \{0,1\}^*$ heißt *reduzierbar auf* $L \subseteq \{0,1\}^*$,

falls es eine berechenbare, totale Funktion

$f : \{0,1\}^* \longrightarrow \{0,1\}^*$ gibt mit

- Für alle $w \in \{0,1\}^*$ gilt: $w \in L' \Longleftrightarrow f(w) \in L$.

Wir schreiben: $L' \leq L$ (mittels f)

f ist die *Reduktion* oder *Reduktionsfunktion* von L' auf L.

Beispiel: Sei $A = \{< M > x \mid M \text{ akzeptiert } x\}$
das Akzeptanzproblem

$H = \{< M > x \mid M \text{ gestartet mit } x \text{ hält}\}$
das Halteproblem

Es gilt: $H \leq A$

Es gilt: $Diag \leq \bar{H}$

Weitere unentscheidbare Probleme: Reduktion

Es gilt: $\text{Diag} \leq \bar{H}$ (Reduktionsfunktion f)

Was folgt daraus?

Wäre $\bar{H}$ rekursiv aufzählbar durch DTM ***M'***, so wäre auch Diag rekursiv aufzählbar:

- bei Eingabe *bin(i)* berechne *f(bin(i))*
- starte ***M'*** mit Eingabe *f(bin(i))*
- akzeptiere *bin(i),* falls ***M'*** *f(bin(i))* akzeptiert.

Da Diag nicht rekursiv aufzählbar ist, ergibt sich ein Widerspruch.

Also: $\bar{H}$ ist nicht rekursiv aufzählbar.
Also: H nicht entscheidbar.

Beweis für: „nicht entscheidbar“.

zu zeigen: L ist nicht entscheidbar

$\longrightarrow$ Wähle geeignetes nichtentscheidbares Problem aus, z. B. Diag.

Zeige: „Wäre L entscheidbar, dann wäre auch Diag entscheidbar“

mit anderen Worten: **zeige** : $\text{Diag} \leq L$

$\longrightarrow$ Haben wir für $L = \bar{H}$ gemacht.

Allgemein:

Falls $L' \leq L$ gilt:

(i) L entscheidbar $\Longrightarrow$ L' entscheidbar

(ii) L rekursiv aufzählbar $\Longrightarrow$ L' rekursiv aufzählbar

Also :

(i) L' nicht entscheidbar $\Longrightarrow$ L nicht entscheidbar

(ii) L' nicht rek. aufz. $\Longrightarrow$ L nicht rek. aufzählbar

Weitere unentscheidbare Probleme

- $\ddot{A} = \{< M >, < M' >| \; L(M) = L(M')\}$
  $\rightarrow$ Äquivalenzproblem

- $A = \{< M > x \mid M$ akzeptiert $x\}$
  $\rightarrow$ Akzeptanzproblem

- $T = \{< M >| \; L(M) = \Sigma^*\}$
  $\rightarrow$ Totalitätsproblem

Es gilt: $H \leq A, A \leq T, T \leq \ddot{A}$

Satz von Rice.

Sei R die Menge aller partiellen berechenbaren Funktionen,
S sei nichttriviale Teilmenge von R, d.h. $S \neq \emptyset, S \neq R$.

Dann ist

$$L(S) := \{< M >| \, M \text{ berechnet eine Funktion aus } S\}$$

nicht entscheidbar.

Bsp: - S = alle totalen berechenbaren Funktionen

$\longrightarrow$ Totalitätsproblem

- S = $\{f\}$ für $f \in R$.

$\Longrightarrow L(f) = \{< M >, M \text{ berechnet } f\}$

- S = Menge aller partiellen Funktionen, die nur auf endlich vielen Argumenten definiert sind.

L (S) = Endlichkeitsproblem

Einige weitere unentscheidbare Probleme …

... die nicht Eigenschaften von DTM's testen.

- **Diophantische Gleichungen**:= {p | p Polynom in mehreren Variablen mit Koeffizienz aus $\mathbb{Z}$, $\exists x \in \mathbb{Z}^n : p(x) = 0$}
- **Arithmetik**:= {A | A ist arithmetische Aussage (Variablen, Quantoren, Logische Verknüpfungen, =, $\neq$, >, <, +,-, *), A ist wahr}

Achtung: **Presburger Arithmetik**: wie oben, aber ohne *

$\longrightarrow$ ist entscheidbar !!