

Eine universelle Turingmaschine M_0 bekommt als Eingabe:

- Beschreibung einer Turingmaschine M ; Eingabe x für M
- Hält/akzeptiert/verwirft genau dann wenn M gestartet mit x hält/akzeptiert/verwirft.

Wie sieht Beschreibung einer Turingmaschine M aus?

- Gödelisierung von M .

Gödelisierung einer Turingmaschine

- Wir haben schon immer Turingmaschinen als endliches Wort über endlichem Alphabet beschrieben \rightarrow mögliche Beschreibung
- Wir wollen nur endliches Alphabet $\{0, 1\}$ benutzen.

Sei M eine DTM mit

$\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{0, 1, \triangleright, \sqcup\}$, $Q = \{q_0, \dots, q_n\}$, $q_{\text{accept}} = q_{n-1}$, $q_{\text{reject}} = q_n$, Startzustand q_0 .

Wir müssen δ durch endliches Wort über $\{0, 1\}$ beschreiben.

Sei $X_1 \hat{=} 0$, $X_2 \hat{=} 1$, $X_3 \hat{=} \sqcup$, $X_4 \hat{=} \triangleright$, $D_1 \hat{=} L$, $D_2 \hat{=} R$

Ein Zeile r der Übergangsfunktion hat dann die Form:

Zeile r : $\delta(q_i, X_j) = (q_k, X_l, D_m)$, und wird codiert durch

$\text{Code}_r = 0^{i+1} 1 0^j 1 0^{k+1} 1 0^l 1 0^m$

Gödelnummer einer Turingmaschine

Die Übergangsfunktion von M habe g Zeilen.

Gödelnummer von $M = \langle M \rangle = 111 \text{ Code}_1 11 \text{ Code}_2 11 \dots \text{Code}_g 111$
(Gödelnummer, da sie als binär dargestellte Zahl aufgefasst werden kann)

Lemma: Sei $\text{Gödel} = \{w \in \{0,1\}^*, w \text{ ist Gödelnummer einer DTM}\}$.

Es gilt: Gödel ist entscheidbar.

Dieser Entscheidungsprozess ist die Syntaxanalyse, falls wir Gödelnummern als „Programme von Turingmaschinen“ auffassen.

Eine Turingmaschine M_0 heißt **universell**, falls für jede 1-Band DTM M und jedes $x \in \{0,1\}^*$ gilt:

- M_0 gestartet mit $\langle M \rangle x$ hält genau dann, wenn M gestartet mit x hält.
- Falls M gestartet mit x hält, berechnet M_0 gestartet mit $\langle M \rangle x$ die gleiche Ausgabe wie M gestartet mit x . Insbesondere akzeptiert M_0 die Eingabe $\langle M \rangle x$ genau dann, wenn M die Eingabe x akzeptiert.

Satz: Es gibt eine universelle 2-Band-DTM M_0 .

(und somit nach unseren früheren Überlegungen auch eine universelle 1-Band DTM)