Notationen

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_l\}$ ist eine endliche, nichtleere menge, ein sog. *Alphabet*.

$A^n = \{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n, a_i \in A\}$ ist die Menge aller *Worte der Länge n* über *A.*

$A^0 = \{\varepsilon\}$ besteht nur aus dem *leeren Wort.*

$$A^* = \bigcup_{n \geq 0} A^n, \quad A^+ = \bigcup_{n \geq 1} A^n, \quad A^{\leq m} = \bigcup_{n=0}^{m} A^n$$

Notationen

$L \subseteq A^*$ *ist eine Sprache über A,*

$\overline{L} = A^* - L$ *Ihr Komplement*

$$\text{Für } \alpha, \beta \in A^* \text{ist } \alpha\beta \text{ die Konkatenation}$$

$$a^0 = \varepsilon, a^n = a^{n-1}a$$

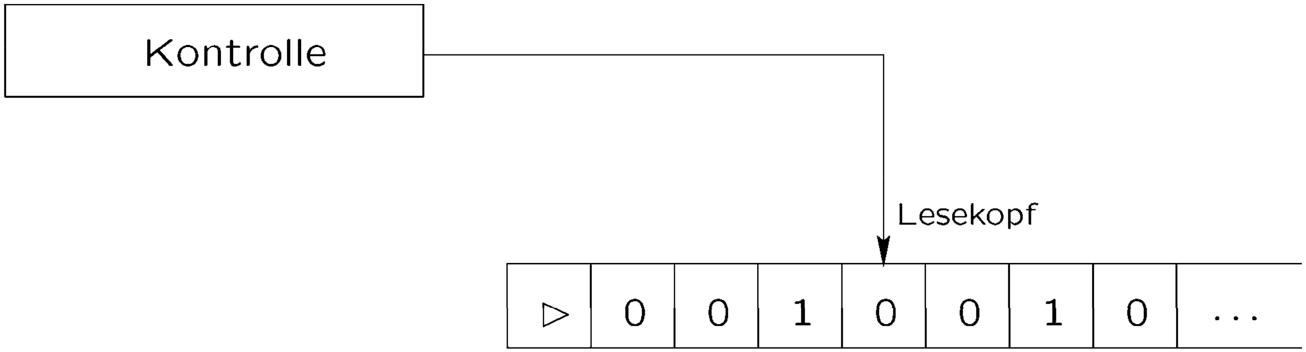
Formalisierungen des Begriffs „Algorithmus“

- Programmiersprache mit vollständiger, formaler Syntax- und Semantik-Beschreibung, z.B. Java, C, Pascal, Algol
  - zu kompliziert, um formal zu argumentieren –

- einfache Rechenmodelle oder Kalküle, die „das gleiche können wie z. B. Java-Programme“

$\longrightarrow$ Turingmaschinen, Registermaschinen, μ -Rekusivität, uniforme Schaltkreisfamilien, …

Turingmaschinen



- Der jeweils nächste Rechenschritt ist eindeutig festgelegt durch:
  aktuellen Zustand und gelesenes Zeichen.

- Der Rechenschritt: überschreibt das gelesene Zeichen durch neues Zeichen, bewegt Kopf nach rechts oder links, und verändert den Zustand.

Turingmaschinen

Eine (*deterministische 1-Band*) *Turingmaschine* (DTM) ist beschrieben durch $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta)$. Dabei sind Q, Σ, Γ endliche, nichtleere Mengen.

1.Q ist die *Zustandsmenge*.

s, der *Startzustand*, q_{accept}, der *akzeptierend Zustand*, und q_{reject}, der *ablehnende Zustand*, sind in Q, q_{accept} und q_{reject} sind verschieden.

2. Σ ist das *Eingabealphabet*, Γ das *Bandalphabet*.

$\sqcup$ und $\triangleright$ sind in Γ, aber nicht in Σ, $\Sigma \subseteq \Gamma$.

3. $\delta : Q - \{q_{accept}, q_{reject}\} \longrightarrow Q \times \Gamma \times \{R, L\}$ ist die *Übergangsfunktion*.

4. Das *Startsymbol* $\triangleright$ ist die linke Begrenzung des Bandes, es wird nie gelöscht oder an anderer Stelle geschrieben, es wir nie versucht, Zellen links von ihm zu benutzen.

Konfiguration

$\widehat{=}$ Momentaufnahme einer TM

Bei Bandinschrift $\alpha\beta$
(α beginnt mit $\triangleright$,
hinter β nur $\sqcup$, Zustand *q*,
Kopf auf erstem Zeichen von β):

Konfiguration $k = \alpha\ q\ \beta$

Nachfolgekonfiguration

K_1, K_2 seien Konfigurationen, $K_1 = \alpha\, q\, \beta$, $K_2 = \alpha'\, q'\, \beta'$

K_2 ist *direkte Nachfolgekonfiguration* von K_1, $K_1 \vdash K_2$, falls gilt:

K_2 entsteht aus K_1 durch Ausführung des (eindeutigen) in K_1 erlaubten Rechenschritts.
Welcher ist das? (Sei $\alpha = \bar{\alpha}\, a$, $\beta = b\, \bar{\beta}$)

$\delta(q, b) = (q', b', R)$, *falls* $K_2 = \alpha\, b'\, q'\, \bar{\beta}$

oder

$\delta(q, b) = (q', b', L)$, *falls* $K_2 = \bar{\alpha}\, q'\, a\, b'\, \bar{\beta}$

Rechnungen

- $K_0 \vdash K_1 \vdash \ldots \vdash K_i$ ist eine Rechnung der Länge *i*,

- K_i ist i-te Nachfolgekonfiguration von K_0, $K_0 \overset{i}{\longmapsto} K_i$

- Falls K‘ für irgendein i die i-te Nachfolge-konfiguration von K ist: $K \overset{*}{\longmapsto} K‘$

Akzeptieren, Entscheiden

- Startkonfiguration von DTM M gestartet mit
  $w \in \sum^* : s \triangleright w$
- M akzeptiert w
  $\Longleftrightarrow \exists \delta, \beta \in \Gamma^* : s \triangleright w \vdash\!\xrightarrow{*} \delta q_{\text{accept}} \beta$
- M lehnt w ab
  $\Longleftrightarrow \exists \delta, \beta \in \Gamma^* : s \triangleright w \vdash\!\xrightarrow{*} \delta q_{\text{reject}} \beta$

Def: $L(M) := \{w \in \sum^*, M \text{ akzeptiert } w\}$

$L(M)$ ist die *von M akzeptierte Sprache*

M *entscheidet* $L(M)$, wenn sie alle $w \in \sum^* - L(M)$ ablehnt.

Entscheidbar, rekursiv aufzählbar, berechenbar

$L \subseteq \sum^*$ heißt rekursiv aufzählbar, genau dann, wenn es eine DTM gibt, die L akzeptiert.

$L \subseteq \sum^*$ heißt entscheidbar, genau dann, wenn s eine DTM gibt, die L entscheidet.

M berechnet die partielle Funktion $f : \sum^* \rightarrow (P - \{\sqcup, \triangleright\})^*$ mit

- $f(w) = y$, falls $s \triangleright w \overset{*}{\longmapsto} q_{\text{accept}} \triangleright y$ (insbesondere wird w von M akzeptiert)

- $f(w)$ nicht definiert, falls w von M nicht akzeptiert wird

Beispiel

$L = \{0^n 1^n, n \geq 1\}$

Folgende DTM mit $Q = \{q_0, \ldots, q_8\}$, $s \triangleq q_0$, $q_{\text{accept}} \triangleq q_7, q_{\text{reject}} \triangleq q_8$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{0, 1, \sqcup, \triangleright\}$

entscheidet L.

δ	0	1	$\sqcup$	$\triangleright$
q_0	$(q_1, 0, R)$	$(q_8, 1, R)$	$(q_8, \sqcup, R)$	$(q_0, \triangleright, R)$
q_1	$(q_1, 0, R)$	$(q_2, 1, R)$	$(q_8, \sqcup, R)$	$(q_8, \triangleright, R)$
q_2	$(q_8, 0, R)$	$(q_2, 1, R)$	$(q_3, \sqcup, L)$	$(q_8, \triangleright, R)$
q_3	$(q_3, 0, L)$	$(q_3, 1, L)$	$(q_4, \sqcup, R)$	$(q_4, \triangleright, R)$
q_4	$(q_5, \sqcup, R)$	$(q_8, 1, R)$	$(q_7, \sqcup, R)$	$(q_8, \triangleright, R)$
q_5	$(q_5, 0, R)$	$(q_5, 1, R)$	$(q_6, \sqcup, L)$	$(q_8, \triangleright, R)$
q_6	$(q_8, 0, R)$	$(q_3, \sqcup, L)$	$(q_8, \sqcup, R)$	$(q_8, \triangleright, R)$