Reductionen

Def: $L' \leq L$ (L' ist reduzierbar auf L)

$\Longleftrightarrow \exists$ berechenbares $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ mit $x \in L' \Longleftrightarrow f(x) \in L$.

Beh: Sei $L' \leq L$.

Dann gilt: L' nicht berechenbar/rek. aufz.

$\Longrightarrow$ L nicht berechenbar/rek. aufz.

Halteproblem mit leerem Band

H_0:= {<M>, M hält bei Eingabe ε }

zz: $H \leq H_0$

gesucht: Reduktionsfunktion f mit <M> x $\vdash$ <M_x>
so dass gilt:
M gestartet mit x hält $\Longleftrightarrow$
M_x gestartet mit ε hält.

Also: H_0 nicht entscheidbar.
Da H_0 rek. aufz. ist, ist $\bar{H}_0$ nicht rek. aufz.

Unendlichkeitsproblem

L_3 = {<M> | M hält für unendliche viele Eingaben}

z.z.: $\bar{H}_0 \leq L_3$

gesucht: Reduktionsfunktion f: <M> $\vdash$ <M‘> mit:

M gestartet mit ε hält nicht $\Longleftrightarrow$
<M‘> hält für unendl. viele Eingaben.

Also: L_3 nicht rek. aufz.

Post'sches Korrespondenzproblem und kontextfreie Sprachen

PKP = $\{(x_1, y_1), \ldots (x_k, y_k), x_i, y_i \in \Sigma^+,$
es gibt $n \geq 1$ und $(i_1, \ldots, i_n) \in \{1, \ldots, k\}^n$ mit:
$x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n} = y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_n}\}$

CF-Schnitt = $\{c(G_1), c(G_2)$, G_1, G_2 sind kontextfreie Grammatiken mit $L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset\}$

Es gilt: PKP ist nicht entscheidbar.

zz: PKP $\leq$ CF-Schnitt

Also: CF-Schnitt ist nicht entscheidbar.

Weitere unentscheidbare Probleme

Satz von Rice.

Sei R die Menge aller partiellen berechenbaren Funktionen,
S sei nichttriviale Teilmenge von R, d.h. $S \neq \emptyset, S \neq R$.

Dann ist

$$L(S) := \{< M >|\ M \text{ berechnet eine Funktion aus } S\}$$

nicht entscheidbar.

Bsp: - S = alle totalen berechenbaren Funktionen
$\longrightarrow$ Totalitätsproblem
- S = $\{f\}$ für $f \in R$.
$\Longrightarrow L(f) = \{< M >, M \text{ berechnet } f\}$
- S = Menge aller partiellen Funktionen, die nur auf endlich vielen Argumenten definiert sind.
L (S) = Endlichkeitsproblem

Die Chomsky-Hierarchie

- Eine Grammatik heißt **kontextsensitiv** oder vom Typ **Chomsky-1**, falls für jede Regel $u \rightarrow v$ gilt: $|u| \leq |v|$.
- Sie heißt **kontextfrei** oder vom Typ **Chomsky-2**, falls alle Regeln vom Typ $u \rightarrow v$ mit $u \in V$ sind.
- Sie heißt **regulär** oder vom Typ **Chomsky-3**, falls alle Regeln vom Typ $u \rightarrow v$ mit $u \in V$ und

  $v \in \{\varepsilon\} \cup \Sigma \cup (\Sigma \times V)$ sind.

(Eine allgemeine Grammatik ist vom Typ **Chomsky-0** .)