

Übungen zur Vorlesung
Komplexitätstheorie
SS 2008
Blatt 4

AUFGABE 1:

Sei $\text{ILP} := \{ \langle A, b \rangle \mid n \in \mathbb{N}, A \in \mathbb{Z}^{n \times n}, b \in \mathbb{Z}^n : \exists x \in \mathbb{Z}^n : A \cdot x \leq b \}$.

- Zeigen Sie: dieses Problem ist \mathcal{NP} -schwer.
- Ist es auch \mathcal{NP} -vollständig? Worin liegt die Schwierigkeit des Beweises?

Sie dürfen für sich bei der Reduktion auf die in der Vorlesung als \mathcal{NP} -vollständig nachgewiesenen Probleme beziehen.

AUFGABE 2:

Betrachten Sie die Entscheidungsvariante von $\#\text{SAT}$:

$$L := \{ \langle \Phi, k \rangle : \text{3KNF-Formel } \Phi \text{ besitzt } \geq k \text{ erfüllende Belegungen} \}$$

Zeigen Sie: a) $\text{SAT} \leq_p L$ b) $L \leq_p \text{SAT}$

AUFGABE 3:

Sei $S \in \mathbb{N}$, Γ und Q endliche Mengen. In der Vorlesung wurden für $0 \leq s \leq S$, $a \in \Gamma$ und $q \in Q$ Boole'sche Variablen $x_{s,a}$, $x_{-1,q}$ und $x_{s,-1}$ eingeführt (und zu einem Variablenvektor \vec{V} zusammengefaßt), die Konfiguration der Länge $\leq S$ einer NTM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta)$ beschreiben sollen. Geben Sie Boole'sche Formeln an für die folgenden Prädikate:

- $\text{legal}(\vec{V})$
- $\text{succ}(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$

AUFGABE 4:

Beweisen Sie:

- Wenn eine Sprache \mathcal{PSPACE} -schwer ist, so ist sie auch \mathcal{NP} -schwer.
- Wenn eine \mathcal{PSPACE} -vollständige Sprache in \mathcal{NP} existiert, so folgt $\mathcal{NP} = \mathcal{PSPACE}$.
- Falls jede \mathcal{NP} -schwere Sprache auch \mathcal{PSPACE} -schwer ist, so folgt $\mathcal{NP} = \mathcal{PSPACE}$.

Bezeichne coNP die Klasse aller Sprachen, deren Komplement in \mathcal{NP} liegt.

- Definieren Sie die formal "coNP-schwer" und "coNP-vollständig". Zeigen Sie:
- Die Klassen "NP-vollständig" und "coNP-vollständig" sind entweder gleich oder disjunkt.

[†]Die (*)-Aufgabe 5 ist ein Bonus, ihre Bearbeitung *noch* freier gestellt, als die der restlichen Übungsaufgaben.

AUFGABE 5:

(*) Gegeben sind die beiden bekannten, \mathcal{NP} -vollständigen Probleme 3SAT und

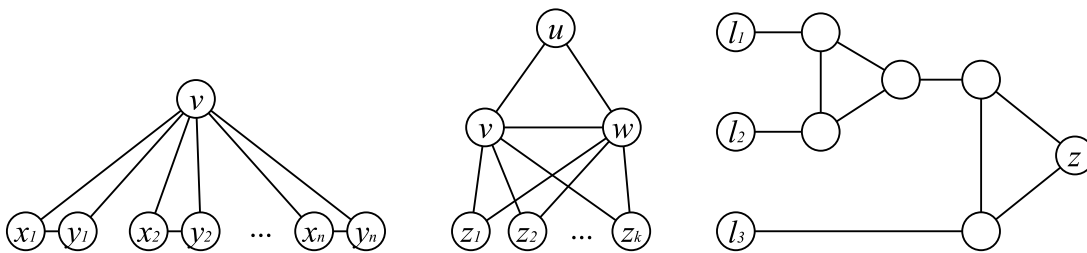
$$3\text{COLOR} = \left\{ \langle G \rangle \mid \begin{array}{l} G = (V, E) \text{ ist ein ungerichteter Graph und es existiert eine} \\ 3\text{-Färbung der Knoten, so dass durch eine Kante aus } E \\ \text{adjazente Knoten stets unterschiedliche Farben haben.} \end{array} \right\}$$

Zeigen Sie durch Reduktion:

$$3\text{SAT} \leq_p 3\text{COLOR}.$$

Hinweis: Überlegen Sie sich dazu die folgenden Punkte. Wir wollen dabei eine 3-Färbung als eine Abbildung $c : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ verstehen. Eine 3-Färbung nennen wir *legal*, wenn adjazente Knoten eine unterschiedliche Farbe haben.

- Bei einer legalen 3-Färbung des K_3 hat jeder Knoten eine andere Farbe.
- Sei c eine legale 3-Färbung des Graphen A_n mit $c(v) = 2$. Für alle $i = 1, 2, \dots, n$ gilt dann $c(x_i), c(y_i) \in \{0, 1\}$ mit $c(x_i) \neq c(y_i)$.
- Sei c eine legale 3-Färbung des Graphen B_k . Für alle $i = 1, 2, \dots, k$ gilt dann $c(z_i) = c(u)$.
- Sei c eine legale 3-Färbung des Graphen H mit $c(l_1) = c(l_2) = c(l_3) = 0$. Dann gilt auch $c(z) = 0$.
- Es existiert eine legale 3-Färbung c des Graphen H , für die gleichzeitig gilt:
 - für alle $i = 1, 2, 3$ gilt $c(l_i) \in \{0, 1\}$,
 - es existiert mindestens ein $i \in \{1, 2, 3\}$ mit $c(l_i) = 1$ und
 - $c(z) = 1$



DIE GRAPHEN A_n , B_k UND H