Umweg-Faktor ebener geometrischer Wegesysteme

Senay Kaynar

18. Januar 2005

Kapitel 1

Einleitung

Um von einem Ort A zu einem Ort B zu gelangen stehen uns verschiedene Transportnetzwerke wie Straßverkehr, Bahnverkehr usw. zur Verfügung. Der Erreichbarkeit von Ort A zu Ort B liegen Distanzbeziehungen zu Grunde. Wenn die beiden Orte, aus der Luftlinie betrachtet, den Abstand x haben, so muss man z.B beim Straßverkehr einen Umweg der Länge δx mit einberechnen. Dabei sollte δ so klein wie möglich sein. Transportnetzwerke können, wie auch in dieser Ausarbeitung, mit Hilfe von planaren Graphen modelliert werden, deren Kanten kurvenartig sind. Die Qualität eines Graphen bezüglich des Transportes kann mit Hilfe von Dilation-Methoden bestimmt werden. Die Dilation ist das Verhältnis zwischen dem kürzesten Weg im Graphen und dem euklidischen Distanz zweier Punkte. Im Allgemeinen unterscheidet man zwischen der *graphenthoretischen Dilation* und der *geometrische Dilation*, welches auch das Thema dieser Ausarbeitung ist.
In der graphenthoretischen Dilation ist der Zugang zum Verkehr nur an Stationen (Knoten) möglich und folglich nur die Kantenlänge, nicht aber die Kantenform, von Bedeutung. Mit der graphenthoretischen Dilation können zum Beispiel Umwege bei Bahnfahrten berechnet werden.
Die geometrische Dilation dagegen, ermöglicht den Zugang zum Verkehr auch zwischen den Knoten. Dies ist vor allem beim Straßenverkehr der Fall, da hier die Möglichkeit gegeben ist, an beliebigen Stellen der Straße (Kante) ins Verkehr einzufahren.

Kapitel 2

Geometrische Dilation

Seien p und q zwei beliebige Punkte in einem planaren Graph G. Dann ist die Dilation definiert als,

$$\delta(G) := \frac{|\xi_G(p,q)|}{|pq|}$$

wobei, $\xi_G(p,q)$ ein kürzester Pfad in G von Punkt p nach Punkt q ist.
Die Dilation des Graphen G, ist die maximale Dilation.

$$\delta(G) := \max_{p,q \in G} \frac{|\xi_G(p,q)|}{|pq|}$$

Für eine gegebene, endliche Punktmenge P, wird nun die kleinstmögliche Dilation gesucht mit,

$$\Delta(P) := \min_{P \subseteq G} \delta(G).$$

$\Delta(P)$ wird als die *geometrische Dilation der Punktmenge P* bezeichnet.
Im folgenden ist in dieser Ausarbeitung ein minimaler Wert (unterer Grenzwert) und maximaler Wert (oberer Grenzwert) für $\Delta(P)$ von Interesse. In [1] werden für die unteren und oberen Grenzwerte die folgenden beiden Behauptungen bewiesen.

1. Es existiert eine endliche Punktmenge P, dessen geometrische Dilation $\frac{\pi}{2}$ beträgt.

2. Die Dilation einer endlichen Punktmenge P kann nicht größer als 1.678 sein.

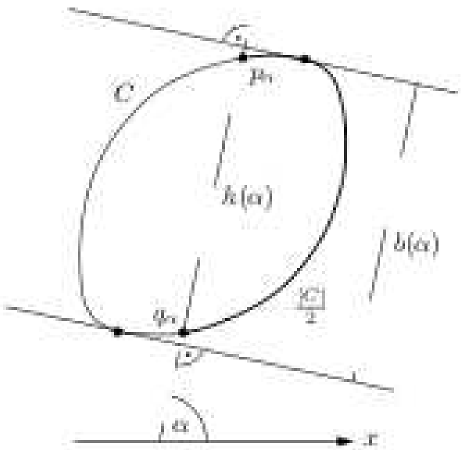

Abbildung 2.1:

2.1 Untere Grenze

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass es Punktmengen gibt, die nur in Graphen mit einer grossen Dilation eingebettet werden können. In [1] wird $\frac{\pi}{2}$ als eine untere Grenze angegeben. Folglich kann das folgende Theorem aufgestellt werden:

Theorem 1: Sei P_n eine endliche Punktmenge eines Polygons mit n Punkten auf dem Einheitskreis. Dann gilt $\Delta(P) = \frac{\pi}{2} = 1,570...$ für $n \geq 10$.

Um Theorem 1 zu beweisen, werden wir uns zunächst mit Zyklen beschäftigen und zeigen, dass weder Graphen mit Zyklen noch Bäume, die die gegebene Punktmenge P_n enthalten, eine Dilation kleiner als $\frac{\pi}{2}$ haben. Dazu beweisen wir vorerst das folgende Lemma über geschlossene Kurven.

Lemma 1: Die Dilation jeder geschlossenen Kurve beträgt mindestens $\frac{\pi}{2}$.

Beweis: Sei C eine geschlossene, konvexe Kurve mit der Dilation δ. Dann existiert eine Gerade g, die den Umfang von C in zwei gleichlange Stücke halbiert und mit der X-Achse den Winkel α einschließt. Die beiden Punkte (p_α, q_α) bilden die Schnittpunkte der Geraden g mit der Kurve C und werden auch als Teilungspaar bezeichnet. (Abbildung 2.1)
Mit

$$h(\alpha) = |p_\alpha, q_\alpha|$$

erhalten wir den Abstand der beiden Punkte p_α und q_α zu Winkel α.
Sei ferner $b(\alpha)$ die Breite von C im Winkel α. Dann ist klar, das $b(\alpha) \geq h(\alpha)$.

Weiterhin gilt aufgrund der Definition der Dilation:

$$\delta \geq \frac{|C|/2}{h(\alpha)} \Rightarrow h(\alpha) \geq \frac{|C|/2}{\delta}$$

Wenn man nun Cauchy's Oberflächenformel anwendet, so erhält man:

$$|C| = \int_0^\pi b(\alpha)d\alpha \geq \int_0^\pi h(\alpha)d\alpha \geq \int_0^\pi \frac{|C|/2}{\delta}d\alpha = \frac{\pi|C|}{2\delta}$$

Daraus folgt $|C| \geq \frac{\pi|C|}{2\delta}$. Wenn man diese Ungleichung nach δ auflöst, so erhält man $\delta \geq \frac{\pi}{2}$.
Wir haben nun gezeigt, dass die Dilation für geschlossene, konvexe Kurven mindesten $\frac{\pi}{2}$ beträgt. Was ist aber mit nicht konvexen, geschlossenen Kurven? Da sich Lemma 1 auf alle geschlossenen Kurven bezieht, muss auch dieser Fall betrachtet werden. Auch für nicht konvexe, geschlossene Kurven existiert ein Teilungspaar (p_α, q_α) zu Winkel α. Dies kann folgendermaßen verdeutlicht werden.
In Abbildung 2.1 haben wir eine nicht konvexe, geschlossene Kurve C. Sei g wieder eine Gerade, die mit der X-Achse den Winkel β einschließt und deren Schnittpunkte mit der Kurve C das Teilungspaar (p_β, q_β) bilden. Wichtig ist, dass für jedes Winkel β ein Teilungspaar existiert, welches den Umfang von C in zwei gleichlange Stücke halbiert. Dazu lassen wir die beiden Punkte, die auf C liegen, mit gleicher Geschwindigkeit in Uhrzeigersinn entlang der Kurve laufen. Es ist klar, dass irgendwann p_β die Anfangsposition von q_β erreicht und umgekehrt. Mit Hilfe dieser Methode, lassen wir für β alle möglichen Winkel durchlaufen, und haben jedesmal ein Teilungspaar.
Sei nun mit ch(C) die konvexe Hülle von C bezeichnet. Dann ist natürlich $|C| \geq |ch(C)|$ und es gilt $b_{ch(C)}(\beta) \geq h_C(\beta)$, wobei $b_{ch(C)}(\beta)$ wieder die Breite von C im Winkel β und $h_C(\beta)$ der minimale Abstand zwischen den beiden Punkten p_β und q_β zu Winkel β ist.
Folglich kann wie im Beweis für den konvexen Fall fortgefahren werden:

$$|C| = \int_0^\pi b_{ch(C)}(\beta)d\beta \geq \int_0^\pi h_C(\beta)d\beta \geq \int_0^\pi \frac{|C|/2}{\delta}d\beta = \frac{\pi|C|}{2\delta}$$

Die Umformung dieser Ungleichung ergibt wieder $\delta \geq \frac{\pi}{2}$.

□

Nachdem wir gezeigt haben, dass die Dilation jeder geschlossenen Kurve mindesten $\frac{\pi}{2}$ beträgt, untersuchen wir nun Graphen die Zykel enthalten.
Im Folgenden sei G ein beliebiger Graph mit Zykel.

Abbildung 2.2:

Lemma 2: Sei G ein geometrischer, endlicher Graph in der Ebene, welches ein Zykel entält. Dann existiert ein Zykel C in G, so dass für beliebige Punkte p und q, die sich auf C befinden, ein kürzester Pfad $\xi_G(p,q)$ in G existiert, der eine Teilmenge von C ist.

Beweis: Sei C der kürzeste Zykel in G. Wenn nun zwei Punkte r und s existieren, die auf C liegen und der kürzeste Pfad von r nach s eine Teilmenge von C ist, dann kann ich einen kürzeren Zykel C' konstruieren, der aus $\xi_G(r,s)$ und dem kürzeren der beiden Stücke zwischen r und s besteht. Dies ist jedoch ein Wiederspruch zu der Annahme, dass C der kürzeste Zykel in G ist. (Abbildung 2.2)

□

Zusammen mit Lemma 1, in der die Dilation geschlossener Kurven behandelt wurde und Lemma 2 ergibt sich das folgende Theorem:

Theorem 2: Die Dilation aller Graphen die Zykel enthalten, beträgt mindesten $\frac{\pi}{2}$.

Somit haben wir gezeigt, dass wir mit Graphen die Zykel enthalten, keine Dilation erhalten können, die weniger als $\frac{\pi}{2}$ beträgt.
Im Folgenden wollen wir als Graphen, Bäume betrachten und zeigen, dass auch hier die Dilation des Graphen für eine Punktmenge P_n mit $n \geq 10$, mindestens $\frac{\pi}{2}$ groß ist. Dazu stellen wir zunächst das folgende Lemma auf:

Lemma 3: Sei T ein Baum in dem die Punktmenge P_n eingebettet ist, dann gilt $\delta(T) \geq \frac{\pi}{2}$ für alle $n \geq 10$.

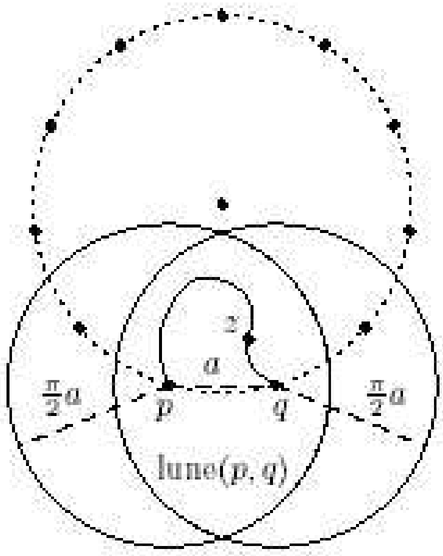

Abbildung 2.3:

Beweis: Nehmen wir an es existiert ein Baum T in dem die Punktmenge P_n eingebettet ist und für den gilt $\delta(T) < \frac{\pi}{2}$. Dann beträgt die Länge des kürzesten Pfades $\xi_G(p,q)$ zwischen zwei benachberten Punkten p und q höchstens $|pq|\delta(T)$, wobei

$$|pq| = 2sin(\frac{\pi}{n}) \leq 2sin(\frac{\pi}{10}) = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618....$$

Sei nun z ein beliebiger Punkt auf dem Pfad $\xi_G(p,q)$. Dann kann die euklidische Distanz zwischen den Punkten p und z den Wert $|pq|\delta(T)$ nicht überschreiten. Das gleiche gilt auch für den Punkt q. Folglich muss sich z in der Ellipse befinden, die von den beiden Kreisen mit dem Radius:

$$|pq|\frac{\pi}{2} \leq 2sin(\frac{\pi}{10})\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\frac{\pi}{2} = 0.9708... < 1$$

gebiltet wird. (Abbildung 2.3)
Die Punkte p und q bilden jeweils den Mittelpunkt der Kreise.
Da $|pq|\frac{\pi}{2} < 1$ ist, liegt der Mittelpunkt des Einheitskreises nicht in der Ellipse.
Seien die Punkte auf dem Einheitskreis mit $p_1, p_2, ...p_n$ bezeichnet.Die Verknüpfung

$$C = \xi(p_1,p_2)\xi(p_2,p_3)...\xi(p_{n1},p_n)$$

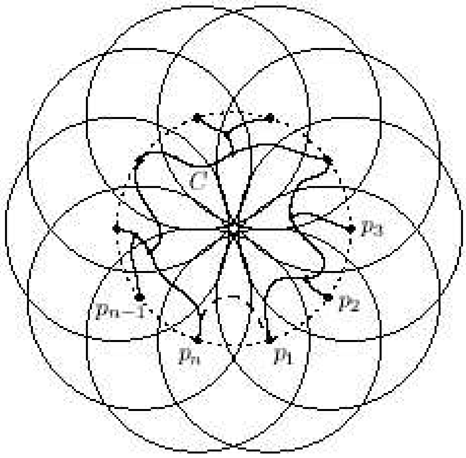

Abbildung 2.4:

ist ein Pfad in T. Mit $\xi(p_n, p_1)$, für p_n und p_1, die ebenfalls benachbart sind, bildet C in T einen Zykel und der Mittelpunkt des Einheitskreises liegt innerhalb dieses Zykels. Dies widerspricht aber der Tatsache, dass T ein Baum ist.
(Abbildung 2.4)

$\square$

Nun können wir Thorem 1 beweisen.
Beweis: Der Einheitskreis, in dem alle Punkte aus P_n eingebettet sind, hat die Dilation $\frac{\pi}{2}$.
Nach Thorem 2 haben alle Graphen, die Zykeln enthalten, eine Dilation $\geq \frac{\pi}{2}$ und nach Lemma 3 existiert auch kein Baum T mit $\delta(T) \geq \frac{\pi}{2}$ der P_n entält. Somit haben wir gezeigt, dass kein Graph existiert, der alle Punkte von P_n enthält und eine Dilation kleiner als $\frac{\pi}{2}$ hat.

$\square$

Die Argumentationen im Beweis von Lemma 3 führt zur folgenden Schlußfolgerung:

Folgerung: Sei C eine geschlossene Kurve und P_n eine endliche Punktmenge, die gleichmäßig auf C verteilt ist, Dann wächst die Dilation jedes Baumes der P_n enthält gegen unendlich, wenn n gegen unendlich geht.

Zu bemerken ist, dass Theorem 1 für Punktmengen P_n mit niedrigen n Werten, nicht anwendbar ist.
Die Dilation von P_3 beträgt:

$$\delta(P_3) = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Wir wissen, dass jeder Graph mit Zykel, eine Dilation von mindestens $\frac{\pi}{2}$ hat. Wenn man die Punkte P_3 auf dem Einheitskreis gleichmäßig verteilt und diese durch Geraden mit dem Mittelpunkt verbindet, so schneiden sich die Geraden im 120° Winkel. das folgende Lemma, welches in [1] bewiesen wird, ist für diesen Fall nützlich:

Lemma 4: Sei v ein Knoten in einem Graphen G an dem sich zwei Kanten im Winkel α schneiden. Die Geraden sind die Tangenten von stückweise geraden Kanten am gemeinsamen Knoten v zum Winkel α. Es gilt $\delta(G) \geq \frac{1}{sin(\alpha/2)}$.

Für unseren Graphen mit der Punktmenge P_3 ist daraus zu folgern, dass $\delta(G) \geq \frac{1}{sin 60°} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Kapitel 3

Obere Grenze

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass jede endliche Punktmenge in einen Graphen eingebettet werden kann, der eine Dilation von 1.678 hat. Wir beginnen mit dem folgenden Theorem.

Theorem 3: Es existiert ein periodischer, die Ebene abdeckender Graph G_∞ mit der Dilation 1.67784..., so dass jede endliche Punktmenge in einem endlichen Teil, einer skalierten Kopie von G_∞ enthalten ist.

Bevor wir Lemma 3 beweisen, werden wir zunächst auf ein technisches Ergebnis in Lemma 5 eingehen und diese beweisen. Der Beweis von Theorem 3 beginnt mit der Konstruktion einens bestimmten Zykels C. Danach wird der Graph G_∞ erzeugt, indem wir an jeden Knoten eines hexagonalen Gitters mit einheitlichen Längen eine Kopie von C platzieren. Zum Schluß zeigen wir, wie eine endliche Punktmenge in den Graphen G_∞ eingebettet werden kann.

Lemma 5: Die geometrische Dilation eines Graphen wird immer von zwei Punkten erreicht, die gegenseitig sichtbar sind.

Beweis: Nehmen wir an, die Dilation $\delta(G)$ wird durch die beiden Punkte p und q erreicht wobei p und q nicht gegenseitig sichtbar sind. Daraus folgt es existiert eine Kante in G die sich zwischen den Punkten p und q befindet. Sei r der Schnittpunkt zwischen der Kante und der Geraden von Punkt p zu Punkt q. Aus der Definition der Dilation folgt:

$$\delta(G) := \frac{|\xi_G(p,q)|}{|pq|} \leq \frac{|\xi_G(p,r)| + \xi_G(r,q)|}{|pr| + |pr|}$$

Der Schnittpunkt r liegt auf der Geraden von Punkt p nach Punkt q und daraus folgt $|pq| = |pr| + |rq|$. Die obige Gleichung kann weiter abgeschätzt

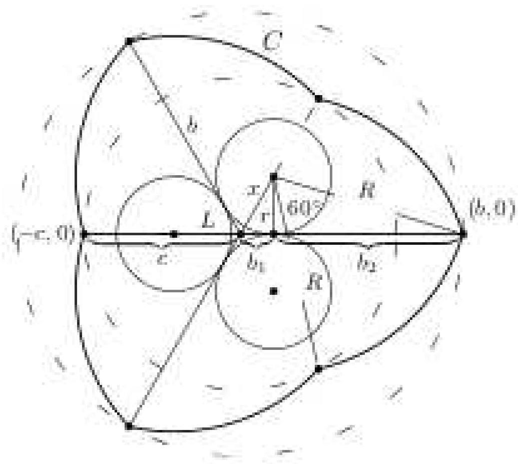

Abbildung 3.1:

werden, weil der Weg über r mindestens so lang ist wie der kürzeste Weg von p nach q.

$$\leq max\left(\frac{|\xi_G(p,r)|}{|pr|}, \frac{\xi_G(r,q)|}{|rq|}\right) \leq \delta(G)$$

Daraus folgt, dass die Dilation von G durch einen der Paare (p,r)(r,q) erreicht wird. Dies ist ein Wiederspruch zu der Annahme.

□

Es folgt der Beweis für Theorem 3.
Beweis: Zuerst konstruieren wir einen Zykel C, mit der wir dann einen periodischen Graphen G_∞ mit der Dilation $\delta(G) = 1,67784...$ erzeugen . Wir zeichnen drei Halbgeraden, jeweils im Winkel 120° zueinander. Als nächstes wählen wir zwei Zahlen, $0 < c < b < 0.5$ die später zur Optimierung des Ergebnises dienen. Abhängig von b und c zeichnen wir drei Kreise so, das jedes Kreis zwei Halbgeraden mit dem Abstand $b_1 = \frac{b-c}{2}$ zum Achnittpunkt der drei Halbgeraden, berührt. (siehe Abbildung 3.1) Sei r der Radius der Kreise und sei mit x der Abstand der Kreis-Mittelpunkte zum Schnittpunkt der Halbgeraden bezeichnet. Dann gilt:

$$\frac{x}{2} = x \cdot cos60° = b_1 = \frac{b-c}{2}$$

$$\frac{x\sqrt{3}}{2} = x \cdot sin60° = r$$

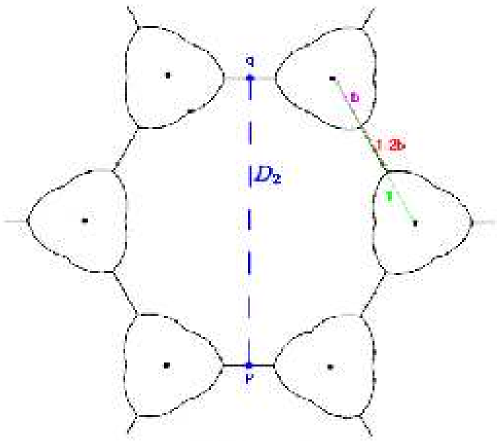

Abbildung 3.2:

Nun wird ein Liniensegment der Länge $b + c$ von (-c,0) bis (d,0) platziert. Zuerst ist L am oberen Kreis , den wir um 60° rotieren lassen, befestigt. Der rechte Endpunkt von L beschreibt einen Kreisbogen der Länge $R\frac{\pi}{3}$. Mit Hilfe von Pythagoras lässt sich R folgendermaßen bestimmen:

$$R = \sqrt{r^3 + b_2^2} = \sqrt{\frac{3}{4}(b-c)^2 + \frac{1}{4}(d+c)^2} = \sqrt{b^2 - bc + c^2}$$

Nach dieser Rotation wird L an den linken Kreis befestigt, die dann im Uhrzeigersinn um 60° rotiert, usw.
Als Resultat erhalten wir einen Zykel, die aus sechs Kreisbögen der Länge $R\frac{\pi}{3}$ besteht, wie in Abbildung 4.1. Die Endpunkte von L bilden jedesmal ein Teilungspaar mit dem Abstand $L = b + c$. Außdem erlangt jedes Teilungspaar die maximale Dilation von C.

$$D_1 = \frac{\pi R}{b + c}$$

Zur Konstruktion des periodischen Graphen G_∞, ersetzen wir jeden Knoten des hexagonalen Gitters durch einen Zykel C.
Die Diltaion eines regelmässigen Sechsecks beträgt $\sqrt{3}$. Aufgrund von Lemma 5 betrachten wir zunächst das Teilungspaar auf der Mitte zweier, gegenüberliegender Kanten eines Sechsecks. (Abbildung 3.2)
Der kürzeste Weg im Graph setzt sich zusammen aus 6 sechstel Kreisen vom Radius R sowie aus 3 Kanten des Sechsecks. Durch das Ersetzen der Knoten durch Zykel, haben sich die Kanten um $2b$ verkürtzt. Wir erhalten die Dilation:

$$D_2 = \frac{2\pi R + 3(1 - 2b)}{\sqrt{3}}$$

Ein weiteres Teilungspaar bilden die Punkte auf den Zykeln mit den geringsten euklidischen Abstand. Diese Punkte liegen auf der Geraden, welches die Mittelpunkte der konstruierten Kreise schneidet. Wir berechnen den euklidischen Abstand der Punkte und unter Verwendung des Kosinussatzes erhalten wir die folgende Dilation:

$$D_3 = \frac{2\pi R + 3(1-2b)}{2(\sqrt{x^2+x+1} - R)}$$

Nach den Berechnungen, die in [1] durchgeführt wurden, liegt das Minimum für $D_1 = D_2 = D_3 = 1.6778...$ mit den Parametern $c = 0.1248...$ und $b = 0.1939....$ Damit haben wir den Graph G_∞ konstroiert.
Als folgendes soll gezeigt werden, wie eine beliebige Punktmenge in solch einen Graphen eingebettet werden kann.
Sei P_n die endliche Punktmenge $P = \{(\alpha_1, \beta_1), ..., (\alpha_n, \beta_n)\}$ mit den Koordinaten $\alpha_1 i, \beta_i$ die in einen Graphen eingebettet werden sollen. Dazu verwenden wir eine Fehlerschranke $\eta > 0$ und einen Skalierungsfaktor γ, so dass die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

1. Jede X-Koordinate α_i liegt näher an 3γ als $\eta\gamma$. Das heißt α_i liegt näher an der Mitte einer Kante als $\eta\gamma$.

2. Jede Y-Koordinate β_i liegt näher an $\sqrt{3}\gamma$ als $\eta\gamma$. Das heißt β_i liegt näher als $\eta\gamma$ neben einer horizontalen Kante, deren Y-Koordinate ein ganzzahliges Vielfaches von $\sqrt{3}\gamma$ ist.

Die Kanten von G werden so verbogen, dass die Punkte auf den entsprechenden kanten liegen und gleichzeitig die Änderung der Dilation von G beliebig klein bleibt. Um nun einen endlichen Graphen zu erhalten, wird aus G_∞ ein sechseckiges Stück geschnitten, der alle Punkte enthält. (Abbildung 3.3)

□

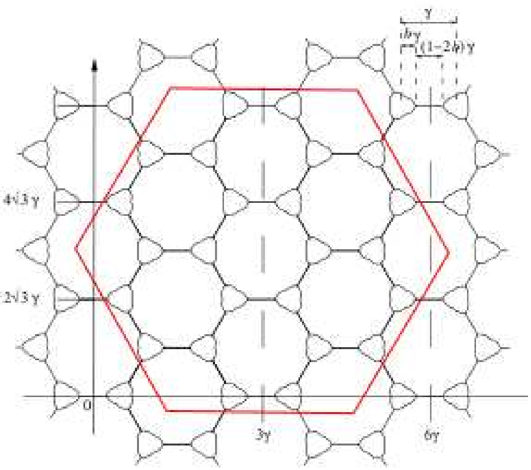

Abbildung 3.3:

Kapitel 4

Ausblick

Wir haben in dieser Ausarbeitung die geometrische Dilation $\Delta(P)$ besprochen und sowohl einen oberen als auch einen unteren Grenzwert für die Dilation berechnet. Doch bleiben immer noch einige Fragen offen. Wie schnell kann die Dilation einer endlichen Punktmenge berechnet werden? Wie schnell kann ein optimaler Phad für P konstruiert werden und was ist der genaue Wert von

$$\Delta := \sup_{P endlich} \Delta(P)?$$

Literaturverzeichnis

[1] Annette Ebbers-Baumann, Ansgar Güne, Rolf Klein. *On the Geometric Dilation of Finite Point Sets*, Universität Bonn(2003):