

Abgeschlossenheit von Büchi-Automaten unter Komplement

Oguzhan Özkurt (6297830)
betreut von Martin Ziegler

14. Januar 2005

Inhaltsverzeichnis

1	endliche Automaten	2
1.1	formale Definition	2
1.2	Abgeschlossenheit von EAs	3
1.2.1	Abgeschlossenheit unter Vereinigung	3
1.2.2	Abgeschlossenheit unter Durchschnitt	3
1.2.3	Abgeschlossenheit unter Komplement	3
1.3	Beispiele	4
1.4	Zusammenfassung	4
2	Automaten auf unendlichen Wörtern	5
2.1	Akzeptanzbedingungen für unendliche Wörter	5
2.1.1	endliche (finite) Akzeptanz	5
2.1.2	fortlaufende (looping) Akzeptanz	5
2.1.3	wiederholende (repeating) Akzeptanz	5
2.2	Büchi-Automaten	6
2.2.1	formale Definition	6
2.2.2	Vorbereitende Eigenschaften	7
2.2.3	Ramsey's Theorem	7
2.2.4	Vereinigung	8
2.2.5	Durchschnitt	8
3	Komplement von Büchi-Automaten	9
3.1	Vorbereitung: Äquivalenzrelationen	9
3.2	Beweis	10
4	Ausblick: Chomsky-Hierarchie für ω-Sprachen	10

Zusammenfassung

Dass die von nichtdeterministische endlichen Automaten (NEAs) akzeptierte Sprachklasse abgeschlossen ist unter Komplement, zeigt man üblicherweise, indem man den NEA in einen Äquivalenten DEA umwandelt. Für Sprachen unendlicher Wörter (sog. ω -reguläre Sprachen) ist dies im allgemeinen nicht mehr möglich. Büchi zeigte 1960, dass die ω -regulären Sprachen dennoch abgeschlossen sind unter Komplement. Dabei spielt Ramseys Theorem für unendliche Graphen eine wichtige Rolle. Hier wird eine Übersicht über Automaten gegeben und dann der Komplementbeweis gezeigt.

1 endliche Automaten

Viele praktische Probleme (z.B. Aufzugssteuerung) lassen sich durch endliche Automaten beschreiben. Diese bieten einen vergleichsweise einfachen Formalismus, der für viele praxisrelevante Probleme schon ausreicht.

In der Ausdrucksstärke sind Endliche Automaten auf reguläre Sprachen beschränkt. Dies ist die Menge aller Sprachen, die durch reguläre Ausdrücke beschrieben werden können.

1.1 formale Definition

Ein Endlicher Automat ist ein 5-Tupel $\mathfrak{A} = \langle Q, \Sigma, q_0, \Delta, F \rangle$, wobei:

- Q ist die Menge der Zustände
- Σ ist das (endliche) Eingabealphabet
- q_0 ist der Startzustand
- Δ ist die Transitionsrelation
- F ist die Menge der Endzustände

An dieser Stelle sollte man zwischen deterministischen und nichtdeterministischen Automaten unterscheiden: während erstere nur eindeutige Transitionen haben (und damit Δ auch eine Funktion sein darf) sind bei letzteren auch mehrere Transitionen mit dem gleichen Buchstaben möglich.

Diese beiden Automatentypen sind sprachäquivalent, d.h. zu einem NEA lässt sich immer ein DEA erzeugen, und DEAs sind Spezialfälle von NEAs.

Ein Lauf ρ (von engl. run) eines Automaten auf einem Wort a (mit a_i ist i -ter Buchstabe von a) ist eine Folge von Transitionen, so dass:

- Der erste Zustand ist q_0
- Für jeden Eingabezustand gibt es eine Transition aus Δ , so dass $q_i \times a_i \times q_{i+1} \in \Delta$

Der Automat akzeptiert a , wenn nach Lesen des letzten Zeichens von a der Automat in einem Zustand aus F ist, ansonsten verwirft er.

Die Menge der akzeptierten Worte ist die von \mathfrak{A} akzeptierte Sprache.

1.2 Abgeschlossenheit von EAs

In diesem Abschnitt betrachten wir die Abgeschlossenheit von endlichen Automaten (und den von ihnen definierten Sprachen) unter Vereinigung, Durchschnitt und Komplement.

1.2.1 Abgeschlossenheit unter Vereinigung

Seien \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{A}_2 zwei endliche Automaten.

Der Vereinigungsautomat $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$ ist nun relativ einfach definierbar:

$\mathfrak{A} = \langle Q_{\mathfrak{A}}, \Sigma_{\mathfrak{A}}, q_0, \Delta_{\mathfrak{A}}, F_{\mathfrak{A}} \rangle$ mit:

- $Q_{\mathfrak{A}} = Q_{\mathfrak{A}_1} \times Q_{\mathfrak{A}_2}$
- $\Sigma_{\mathfrak{A}} = \Sigma_{\mathfrak{A}_1} \cup \Sigma_{\mathfrak{A}_2}$
- $q_0 = q_{0, \mathfrak{A}_1} \times q_{0, \mathfrak{A}_2}$
- $\Delta_{\mathfrak{A}} = ((Q_{\mathfrak{A}_1} \times Q_{\mathfrak{A}_2}) \times \Sigma \times (Q_{\mathfrak{A}_1}' \times Q_{\mathfrak{A}_2}')) \in \Delta_{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow (Q_{\mathfrak{A}_1} \times \Sigma \times Q_{\mathfrak{A}_1}') \in \Delta_{\mathfrak{A}_1} \text{ oder } (Q_{\mathfrak{A}_2} \times \Sigma \times Q_{\mathfrak{A}_2}') \in \Delta_{\mathfrak{A}_2}$
- $F_{\mathfrak{A}} = F_{\mathfrak{A}_1} \times F_{\mathfrak{A}_2}$

Also einfach das "gleichzeitig ausführen" von \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{A}_2 . Am schwierigsten ist hierbei die Transitionsrelation, die Komponentenweise mit den ursprünglichen Automaten übereinstimmt:

$((Q_{\mathfrak{A}_1} \times Q_{\mathfrak{A}_2}) \times \Sigma \times (Q_{\mathfrak{A}_1}' \times Q_{\mathfrak{A}_2}')) \in \Delta_{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow (Q_{\mathfrak{A}_1} \times \Sigma \times Q_{\mathfrak{A}_1}') \in \Delta_{\mathfrak{A}_1} \text{ oder } (Q_{\mathfrak{A}_2} \times \Sigma \times Q_{\mathfrak{A}_2}') \in \Delta_{\mathfrak{A}_2}$

Also \mathfrak{A} akzeptiert genau dann wenn \mathfrak{A}_1 oder \mathfrak{A}_2 einzeln akzeptieren.

1.2.2 Abgeschlossenheit unter Durchschnitt

Dies ist wie Vereinigung, nur dass die Transitionsrelation leicht geändert werden muss: $((Q_{\mathfrak{A}_1} \times Q_{\mathfrak{A}_2}) \times \Sigma \times (Q_{\mathfrak{A}_1}' \times Q_{\mathfrak{A}_2}')) \in \Delta_{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow (Q_{\mathfrak{A}_1} \times \Sigma \times Q_{\mathfrak{A}_1}') \in \Delta_{\mathfrak{A}_1} \text{ und } (Q_{\mathfrak{A}_2} \times \Sigma \times Q_{\mathfrak{A}_2}') \in \Delta_{\mathfrak{A}_2}$

D.h. der Durchschnittsautomat akzeptiert genau dann, wenn jeder der einzelnen Automaten akzeptieren wuerde.

1.2.3 Abgeschlossenheit unter Komplement

Dies ist nun etwas aufwändiger:

1. Automaten in eine deterministische Form überführen
2. evtl. neuen Anfangszustand mit ϵ -Transitionen erzeugen
3. Mengen der akzeptierenden und nichtakzeptierenden Zustände vertauschen

Durch das Determinisieren bringt man den Zustand in eine für das Vertauschen der Zustände einfachere Form. Um evtl. Probleme mit dem leeren Wort (ϵ) zu vermeiden, muss man oft einen zusätzlichen Startzustand einführen. Um dann das Komplement zu bilden, werden einfach die Mengen der akzeptierenden und verworfenen Zustände vertauscht (mit Berücksichtigung des Anfangszustandes)

1.3 Beispiele

Ein Automat der $\{ab\}^*$ akzeptiert: $\mathfrak{A}_1 = \langle Q, \Sigma, q_0, \delta, F \rangle$ mit:

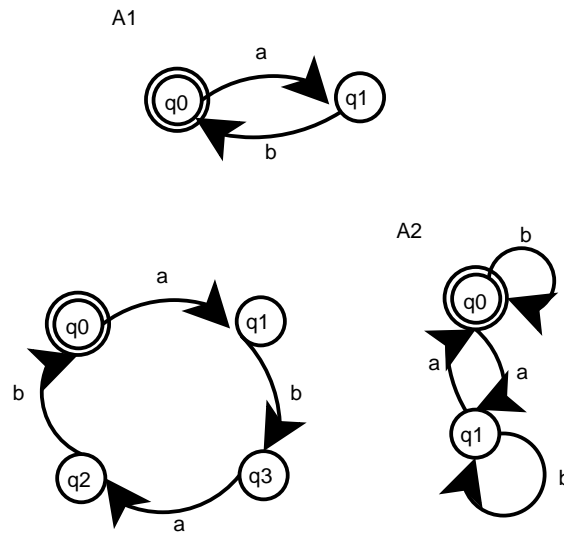
$Q = \{q_0, q_1\}, \Sigma = \{a, b\}, \delta = \{(q_0, a, q_1), (q_1, b, q_0)\}, F = \{q_0\}$

Ein Automat, der gerade Anzahlen von "a" akzeptiert:

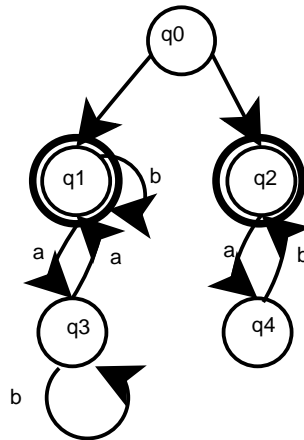
$\mathfrak{A}_2 = \langle Q, \Sigma, q_0, \delta, F \rangle$ mit:

$Q = \{q_0, q_1\}, \Sigma = \{a, b\}, \delta = \{(q_0, a, q_1), (q_1, a, q_0), (q_i, b, q_i)\}, F = \{q_0\}$

Der Durchschnittsautomat $\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2$:



Der Vereinigungsautomat $\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$ lässt sich ähnlich konstruieren.



1.4 Zusammenfassung

Endliche Automaten sind also unter Vereinigung, Durchschnitt und Komplement abgeschlossen.

2 Automaten auf unendlichen Wörtern

Die Motivation für Automaten auf unendlichen Worten sind Systeme, die keinen “Endzustand“ erreichen, sondern wie z.B. ein Aufzug oder eine Bahnschranke “beliebig lange“, d.h. ohne Terminierung, arbeiten. Dabei wird es deutlich schwerer, die Akzeptanzbedingung zu definieren, denn das Erreichen eines Zustandes ist nicht unbedingt eine sinnvolle Bedingung (denn danach kann das System noch immer einen “ungünstigen“ Zustand erreichen).

2.1 Akzeptanzbedingungen für unendliche Wörter

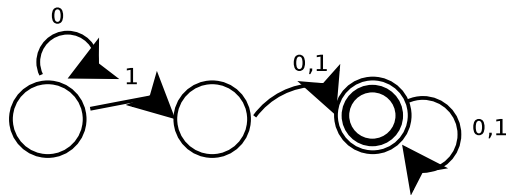
2.1.1 endliche (finite) Akzeptanz

Dies ist eine Variation der bisherigen Akzeptanz. Ein Wort α wird akzeptiert \Leftrightarrow es gibt ein Präfix x von α so dass x akzeptiert wird. Es werden also einfache reguläre Ausdrücke benutzt, der “überstehende“ Teil ist für die Akzeptanz unwichtig. Eine solche Sprache wäre z.B. “ das Wort beginnt mit ab^*a .

Beispiel Eine endlich akzeptierte Sprache, deren Komplement nicht endlich erkannt wird:

$$L = \{0^*1\Sigma^\omega\}$$

Die Umkehrung hiervon ist $L = \{0^\omega\}$, was offensichtlich nicht finit akzeptierbar ist.



2.1.2 fortlaufende (looping) Akzeptanz

Der Automat akzeptiert ein unendliches Wort \Leftrightarrow der Automat hält nicht an, d.h. zu jedem Zustand und Eingabesymbol gibt es einen Folgezustand.

Ein Beispiel hierfür wäre $L = \{(01)^\omega\}$

Beispiel $L = \{0^\omega\}$

Die Umkehrung ist finit akzeptierbar und nicht fortlaufend akzeptierbar

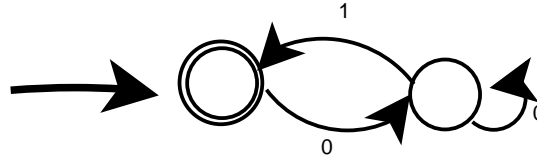
Diese beiden Akzeptanzbedingungen sind relativ schwach, sie geben den Automaten keine spürbar grössere Ausdrucksstärke.

Hinweis: Die Negation einer finit akzeptierbaren Sprache ist looping-akzeptierbar und umgekehrt.

2.1.3 wiederholende (repeating) Akzeptanz

Hier wird nun eine Menge F von Zuständen analog zu den Endzuständen der endlichen Automaten definiert, so dass in einem Lauf mindestens ein Zustand dieser Menge unendlich oft durchlaufen wird. Dies ermöglicht im nichtdeterministischen Fall die Akzeptanz von regulären Ausdrücken auf unendlichen Worten.

Beispiel $L = (0^*1)^\omega$ ist deterministisch wiederholend akzeptierbar.



Beispiel $L_n = (\alpha|_n\alpha)$ enthält n mal a ist deterministisch wiederholend akzeptierbar. Das Komplement von L_n ist die Sprache aller Worte, die nicht n Vorkommen von a enthalten. Dies ist nur nichtdeterministisch erkennbar.

2.2 Büchi-Automaten

2.2.1 formale Definition

Ein Büchi-Automat ist ein 5-Tupel $A = \langle Q, \Sigma, q_0, \Delta, F \rangle$, wobei:

- Q ist die Menge der Zustände
- Σ ist das (endliche) Eingabealphabet
- q_0 ist der Startzustand
- Δ ist die Transitionsrelation (nichtdeterministisch)
- F ist die Menge der “Endzustände“

Die Benennung von F als “Endzustände“ ist hierbei analog zu den einfachen Endlichen Automaten zu sehen und hat keine besondere Bedeutung.

Wie bei den bisherigen Automaten muss man auch hier deterministische und nichtdeterministische BA unterscheiden.

Ein Lauf ρ ist, analog zu den endlichen Automaten, eine Folge von Zuständen, die durch das Einlesen eines Wortes angenommen werden.

Definition: $Inf(\rho)$ ist die Menge aller Zustände, die während eines Laufes ρ unendlich oft durchlaufen wird.

Ein Wort wird genau dann akzeptiert, wenn (mindestens) ein Element aus $Inf(\rho)$ in F liegt, d.h. wiederholende Akzeptanz auf einer vorgegebenen Teilmenge.

Beispiel: $L_n = (\alpha|_n\alpha)$ enthält entweder genau n mal a oder n mal b ist eine nichtdeterministische Sprache, die ein Büchi-Automat erkennen kann. Nachdem der Automat am Anfang nichtdeterministisch entscheiden muss, ob er die Vorkommen der a oder b zählt, ist diese Sprache nicht deterministisch erkennbar.

Hinweis:

- Jede nichtleere Büchi-Sprache L enthält ein schliesslich periodisches Wort $uvvvvvv$
- Nicht jede endliche (sogar nichtmal einelementige) ω -Sprache ist Büchi-erkennbar, z.B. $L = \{0101^201^3\}$

Es gilt: $Inf(\rho) \cap F \neq \emptyset \Leftrightarrow$ Das Wort wird von dem Automaten akzeptiert.

2.2.2 Vorbereitende Eigenschaften

Die folgenden Eigenschaften sind für den Komplementbeweis sehr hilfreich und werden schon vorbereitend hier gezeigt:

1. Wenn L Büchi-erkennbar dann:

$$L = \bigcup_{i=1}^n U_i \circ W_i^\omega$$
für reguläre U_i, W_i mit $W_i \circ W_i \subseteq W_i$
2. Wenn $W \subseteq \Sigma^*$ regulär, dann ist W^ω Büchi-erkennbar
3. Wenn $U \subseteq \Sigma^*$ regulär und $L \subseteq \Sigma^\omega$, dann ist auch $U \circ L$ Büchi-erkennbar.
4. Die Umkehrung des ersten Punktes gilt:
Jedes $L = \bigcup_{i=1}^n U_i \circ W_i^\omega$ ist Büchi-erkennbar, wenn $U_i, W_i \subseteq \Sigma^*$ regulär sind.

Beweis:

- 1) Sei $A_{qp} = \{x \in \Sigma^* \mid q \vdash_x p\}$ für $p, q \in Q$ (jeweils regulär)
- Für jede Büchi-akzeptierbare Sprache gilt dann:

$$L(A) = \bigcup_{f \in F} A_{q_0 f} \circ (A_{ff})^\omega, A_{ff} \circ A_{ff} \subseteq A_{ff}$$

also ein Präfix U und ein periodisches Restwort W^ω

- 2) Gilt offensichtlich (mit der Einschränkung $\epsilon \notin W$)
- 3) Erweitere jedes Präfix U_i zu $U \circ U_i$. Dies ist offensichtlich weiter regulär, damit ist die entstehende Sprache nach 1) auch Büchi-erkennbar.
- 4) Folgt aus 2), 3) sowie den folgenden Eigenschaften der Vereinigung und des Durchschnitts

2.2.3 Ramsey's Theorem

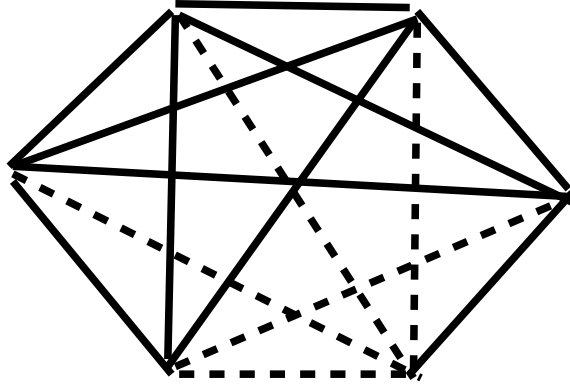
Hierbei handelt es sich um eine Aussage aus der Graphentheorie, die hier nicht bewiesen wird, aber für den Komplementbeweis wichtig ist.

(Hinweis: "Färbung" im graphentheoretischen Sinne wird üblicherweise mit Zahlen dargestellt, bildlich kann man sich hierzu vorstellen z.B. 1 = rot, 2 = blau, ...)

Ein vollständiger Graph K_n ist ein Graph mit n Knoten, die alle miteinander verbunden sind. K_ω ist der unendliche vollständige Graph.

Theorem: Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass jede 2-färbung der Kanten des vollständigen Graphen K_N einen monochromatischen (einfarbigen) Teilgraphen K_m enthält.

Beispiel: In jedem zwei-gefärbten Graphen K_6 gibt es ein einfarbiges Dreieck (oder ein grösseres Vieleck)



Theorem: Für jede $m, k \in \mathbb{N}$ existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass jede k -färbung der Kanten von K_N ein monochromatisches K_m induziert.

Theorem: Jede k -Färbung von K_ω induziert ein monochromatisches K_ω .

2.2.4 Vereinigung

Seien A_1, A_2 Büchi-Automaten. Der Vereinigungsautomat A ist definiert analog zur Vereinigung endlicher Automaten, d.h. A akzeptiert $\alpha \Leftrightarrow A_1$ oder A_2 akzeptieren α

2.2.5 Durchschnitt

Der naive Ansatz, die zu endlichen Automaten analoge Konstruktion, scheitert hier an einem Problem: Wir können nicht annehmen, dass gleichzeitig in beiden Automaten ein Endzustand erreicht wird. Daher erweitert man den Zustandsraum zu $\{Q_1 \times Q_2 \times \{1, 2, 3\}\}$ und macht folgendes:

- Warte auf einen Endzustand in der ersten Komponente
- Wenn $p \in F_1$ gesehen wurde, warte auf $q \in F_2$
- Wenn $q \in F_2$, dann ist dieser "Zykel" komplett, gehe über zu Zustand 1

Man ergänzt also den Automaten um diese Transitionen:

Sei $(p, a, p') \in \Delta_1, (q, a, q') \in \Delta_2$

- $((p, q, 1), a, (p', q', 1))$ falls $p' \notin F_1$
- $((p, q, 1), a, (p', q', 2))$ falls $p' \in F_1$
- $((p, q, 2), a, (p', q', 2))$ falls $q' \notin F_2$
- $((p, q, 2), a, (p', q', 3))$ falls $q' \in F_2$
- $((p, q, 3), a, (p', q', 1))$

Der Durchschnittsautomat akzeptiert also, wenn alternierend unendlich oft je ein Endzustand der beiden Automaten erreicht wird.

3 Komplement von Büchi-Automaten

Es existiert keine einfache Konstruktion für das Komplement von Büchi-Automaten. Ein konstruktiver Beweis benötigt Muller-Automaten und andere Formalismen und ist auch an dieser Stelle zu aufwändig. Daher werden wir hier einen Existenzbeweis auf Sprachebene bringen.

3.1 Vorbereitung: Äquivalenzrelationen

Definition: Eine Relation \sim heisst Äquivalenzrelation genau dann wenn:

1. $x \sim x$ (reflexiv)
2. $x \sim x' \Leftrightarrow x' \sim x$ (symmetrisch)
3. $x \sim x'$ und $x' \sim x'' \Rightarrow x \sim x''$ (transitiv)

Definition: Der Index einer Äquivalenzrelation ist die Anzahl der verschiedenen Klassen. Eine Kongruenzrelation ist eine mit einer Operation (hier \circ) verträgliche Äquivalenzrelation

Definition: $q \vdash_x p \Leftrightarrow$ von Zustand q gelangt man mit lesen des Wortes x nach p

$q \vdash_x^f p \Leftrightarrow$ von Zustand q gelangt man mit lesen des Wortes x über f nach p

Lemma: Für festen Büchi-Automaten A und die dadurch definierte Sprache $L(A)$ betrachte \sim auf Σ^* :

$$x \sim y \Leftrightarrow \forall p, q, f \in Q : (q \vdash_x p \Leftrightarrow p \vdash_y q) \wedge (q \vdash_x^f p \Leftrightarrow p \vdash_y^f q)$$

- endlicher Index von \sim : Offensichtlich nachdem sich jede reguläre Sprache durch einen Automaten darstellen lässt und die Anzahl der Äquivalenzklassen höchstens so gross wie die Anzahl der Zustände ist.
- Seien $U_0, \dots, U_n, \dots \subseteq \Sigma^*$ \sim -klassen.
Wenn $(U_0 \circ U_1 \circ \dots) \cap L \neq \emptyset$, dann $(U_0 \circ U_1 \circ \dots) \subseteq L$
Beweis: $\alpha \in L, \alpha = u_0 u_1 \dots u_n \dots$ mit $u_i \in U_i$. Per Definition ist A unendlich oft in einem Zustand $f \in F$.
 $\beta = w_0 w_1 \dots w_n \dots$ mit $w_i \sim u_i \Rightarrow \beta \in U_0 \circ U_1 \circ \dots \circ U_n \circ \dots$
 \Rightarrow akzeptierender Lauf, $f \in F$ unendlich oft, $\Rightarrow \beta \in L$
- Sei R eine beliebige Äquivalenzrelation mit endlichem Index. Zu jedem $\alpha \in \Sigma^\omega$ gibt es R -Klassen $U, W \subseteq \Sigma^*$ so dass $\alpha \in U \circ W^\omega$
Beweis: Seien U_1, U_2, \dots, U_K endlich viele R -Klassen.
Betrachte den unendlichen kompletten Graphen
 $G : V = \mathbb{N}, E = \{\{i, j\} | i < j\}$. Weise jedem $\{i, j\} \in E$ ein eindeutiges $k \in \{1, \dots, K\}$ zu so dass $(\alpha_i \dots \alpha_{j-1}) \in U_k$. Daraus folgt eine endliche Färbung von E .
Ramseys Theorem sagt nun, dass es einen unendlichen monochromatischen Teilgraphen gibt:

$\exists V \subseteq \mathbb{N}, |V| = \text{inf}, E|_V$ monochromatisch mit Farbe z.B. K , also

$$\forall i < j \in V : (\alpha_i \cdots \alpha_{j-1}) \in U_k$$

$$V = \{i_1, i_2 \cdots, i, \cdots\}$$

$$\Rightarrow \alpha = \underbrace{\alpha_0 \cdots \alpha_{i_1-1}}_{\in U_l} \underbrace{\alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_2-1} \alpha_{i_2}}_{\in U_k} \underbrace{\alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_3-1} \cdots}_{\in U_k}$$

$$\in U_l \circ I_k^\omega$$

3.2 Beweis

Sei $\alpha \in L$ ein beliebiges Wort aus einer Büchi-akzeptierbaren Sprache L .
Für eine Kongruenzrelation \sim nehme U_α, W_α nach [vorbereitende Eigenschaften] (3) Dann gilt:

$$\neg L \subseteq \bigcup_{\alpha \notin L} U_\alpha W_\alpha^\omega = \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} W_{\alpha_i}^\omega$$

nach [vorbereitende Eigenschaften] (4) ist das Büchi-erkennbar.

Beweis durch Widerspruch:

Angenommen $\not\subseteq$, also:

$$\exists \beta \in \left(\bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} W_{\alpha_i}^\omega \cap L \right), \text{ z.B.}$$

$$\beta \in U_{\alpha_1} W_{\alpha_1}^\omega \cap L$$

$$\text{Dann } \alpha_1 \in U_{\alpha_1} W_{\alpha_1}^\omega = U_{\alpha_1} \circ W_{\alpha_1} \circ W_{\alpha_1} \circ \cdots \circ W_{\alpha_1} \circ \cdots \subseteq L$$

★ Widerspruch zu $\alpha_1 \notin L$

Also ist das Komplement einer Büchi-erkennbaren Sprache L auch Büchi-erkennbar.
Damit sind Büchi-erkennbare Sprachen ähnlich wie (endliche) reguläre Sprachen unter Vereinigung, Durchschnitt und Komplement abgeschlossen.

4 Ausblick: Chomsky-Hierarchie für ω -Sprachen

Die Chomsky-Hierarchie für Sprachen endlicher Wörter besteht aus 4 Gruppen:[8]

- Typ 3: reguläre Sprachen (Automaten)
- Typ 2: kontextfrei (nichtdeterministische Pushdown-Automaten)
- Typ 1: kontextabhängige Sprachen (“linear-bounded automata“)
- Typ 0: rekursive Sprachen (Turing-Maschinen)

Eine solche Hierarchie gibt es auch in gewisser Weise für ω -Sprachen.
Hier definiert man die Menge der ω -regulären Sprachen als die Menge der Sprachen, die Büchi-erkennbar sind. Analog lassen sich Typ-0 und Typ-2 Sprachen definieren. (Typ 1 hat keine Entsprechung auf unendlichen Worten).

Literatur

- [1] J.R. BÜCHI:
“On a decision method in restricted second order arithmetic“,
S.1–11 in *Proc. 1960 Int. Congr. for Logic*, Stanford Univ. Press.
- [2] G. GOOS, J. HARTMANIS (Edts):
“Automata on Infinite Words“,
Band **192** der *Lecture Notes in Computer Science*, Springer (1985).
- [3] <http://www-i7.informatik.rwth-aachen.de/d/teaching/ws0304/autoinf>
- [4] <http://tele.informatik.uni-freiburg.de/lehre/ss01/dres/dres.part2.pdf>
- [5] W. THOMAS:
“Automata on infinite Objects“,
Aachener Informatik-Berichte 88-17
- [6] JAN VAN LEEUWEN (Editor):
Handbook of Theoretical Computer Science,
Band B: “Formal Models and Semantics“
- [7] G. ROZENBERG, A. SALOMAA (Edts):
Handbook of Formal Languages,
Band 3: Beyond Words
- [8] <http://www.cs.may.ie/~jpower/Courses/parsing/node21.html>